3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА.

1. Фундаментальная группа пространства орбит

Если пространство X линейно связно и $\pi_1(X)$ — тривиальная группа (группа из одного элемента), то X называется односвязным.

Пусть X — односвязное пространство и G — группа преобразований X, т.е. группа, элементы которой являются взаимно однозначными непрерывными отображениями X в себя (G не обязательно состоит из *всех* таких отображений).

Напоминание 1. Орбитой точки $x \in X$ под действием группы G называется множество $\{g(x) \mid g \in G\}$.

Символом X/G обозначают пространство орбит, т.е. топологическое пространство, полученное отождествлением всех точек каждой из орбит (с обычной топологией фактор-пространства).

Задача 1. Докажите, что орбиты двух точек $x_1, x_2 \in X$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Группа преобразований G называется *точной*, если равенство $g(x) = x$ возможно только при $g = \mathrm{id}$. Группа преобразований G называется дискретной, если для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U, что множества $g_1(U)$ и $g_2(U)$ для любых $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$, не пересекаются.

Теорема 1. *Пусть X — односвязное топологическое пространство, а G — точная дискретная группа преобразований X. Тогда фундаментальная группа пространства орбит X/G изоморфна G.*

Задача 2 (фундаментальная группа окружности)**.** Пусть $X = \mathbb{R}$, а группа G состоит из всех преобразований $f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + n$, $n \in \mathbb{Z}$. а) Докажите, что пространство орбит X/G гомеоморфно окружности. б) Проверьте условия теоремы о пространстве орбит: докажите, что X односвязно, а группа G — дискретная и точная. в) Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 3 (односвязность сферы S^n при $n \geq 2$)**.** Можно, при желании, считать, что $n = 2$. а) Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — произвольное непрерывное отображение (кривая), и $f(0) = a$, $f(1) = b$. Докажите, что существует гомотопия $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $F(0,t) = a$, $F(1,t) = b$, и $F(s,1) = a + s(b-a)$ (отрезок, соединяющий a и b). б) Пусть $f : [0,1] \to S^n$ — кривая, целиком лежащая в южном полушарии сферы (если $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, то южное полушарие это $S^n \cap \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$), причем $f(0) = a$, $f(1) = b$. Докажите, что существует гомотопия $F : [0,1] \times [0,1] \to S^n$ такая, что $F(0,t) = a$, $F(1,t) = b$ для всех $0 \leq t \leq 1$, и $F(s,1)$ — дуга большого круга, соединяющая a и b. в) Пусть $f : [0,1] \to S^n$ — петля (т.е. $f(0) = f(1) = a$). Докажите, что существует N такое, что для всякого $k = 0, \dots, N-1$ кривая $f(s)$ при $k/N \leq s \leq (k+1)/N$ лежит в одной половине сферы. г) Докажите, что кривая f из пункта 3в гомотопна "сферической ломаной" — кривой, составленной из конечного количества дуг большого круга. д) Пусть $n \geq 2$. Докажите, что кривая f гомотопна отображению $f_1(s) \equiv a$, и тем самым S^n односвязна.

Указание. Пункт 3б: спроектируйте южное полушарие из северного полюса на экваториальную (гипер)плоскость. Пункт 3в: воспользуйтесь тем, что сфера S^n — компакт. Пункт 3д: найдите точку, не лежащую на сферической ломаной и спроектируйте сферу из этой точки на экваториальную (гипер)плоскость.

Задача 4 (фундаментальная группа проективного пространства)**.** а) Рассмотрим группу из двух преобразований S^n — тождественного и преобразования σ, переводящего каждую точку в диаметрально противоположному. Докажите, что эти преобразования образуют точную дискретную группу. б) Докажите, что пространство орбит этой группы гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^n$. Тем самым из задачи 3 вытекает, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (группа из 2 элементов).

2. Доказательство теоремы 1

Задача 5. Докажите, что в условиях теоремы 1 отображение $p : X \to X/G$, ставящее в соответствие каждой точке ее орбиту, является накрытием.

Выберем точку $b \in X$, и пусть $O_b \in X/G$ — ее орбита. Пусть $f : [0,1] \to X/G$ — петля, для которой $f(0) = f(1) = O_b$, и пусть $\varphi : [0,1] \to X$ — поднятие f (т.е. $p \circ \varphi = f$) с условием $\varphi(0) = b$. Тогда $\varphi(1) \in O_b$, т.е. $\varphi(1) = g(b)$ для некоторого $g \in G$.

Задача 6 ([П]). а) Докажите, что соответствие $f \mapsto g$ определено (т.е. все упомянутые в конструкции объекты существуют и определены однозначно). б) Докажите, что если петли f_1 и f_2 гомотопны, то им соответствует один и тот же элемент $g \in G$, так что получается отображение $r : \pi_1(X/G, O_b) \to G$. в) Докажите, что отображение r — гомоморфизм групп. г) Докажите, что отображение r — мономорфизм групп, т.е. если $g = r(f) = \mathrm{id}$, то петля f стягиваема. д) Докажите, что отображение r — эпиморфизм групп, т.е. для каждого g существует петля f такая, что $r(f) = g$.

Указание. Пункт 6а вытекает из задачи 5 и точности группы G. Пункт 6б — из теоремы о накрывающей гомотопии и дискретности группы G. Пункт 6г вытекает из односвязности X. Пункт 6д — из линейной связности X.

Задача (без номера). Решите задачи 5 и 8–16 из листка 1 — теперь это несложно...

3. Гомотопии и гомотопическая эквивалентность

Напоминание 2. Пусть X, Y — тологологические пространства. Непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ называются гомотопными, если существует такое непрерывное отображение (гомотопия) $F : X \times [0,1] \to Y$, что $f_0(x) = F(x,0)$ и $f_1(x) = F(x,1)$ для всех $x \in X$.

Напоминание 3. Топологические пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению Y в себя, а $g \circ f$ — тождественному отображению X в себя.

Задача 7. Докажите, что следующие пространства гомотопически эквивалентны: а) прямая и точка; б) пространство $\mathbb{R}^n$ (если хотите, то $n = 2$) и точка; в) произвольное выпуклое множество $L \subset \mathbb{R}^n$ и точка (множество L называется выпуклым, если для любых двух точек $a, b \in L$ отрезок $\{a + s(b-a) \mid 0 \le s \le 1\}$ целиком лежит в L); г) лента Мебиуса и окружность (лента Мебиуса получается из квадрата $\{(x,y) \mid 0 \le x, y \le 1\}$ попарным отождествлением точек $(0,y)$ и $(1, 1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$); д) любые два гомеоморфных пространства X и Y; е) пространства X и Y, при условии что существует пространство Z, гомотопически эквивалентное как X, так и Y; ж) плоскость без точки и окружность; з) [П] плоскость без двух точек, букет двух окружностей и тор (поверхность бублика) без точки; и) буквы `P` и `O`; к) произвольный граф G и граф G', полученный из него стягиванием "висячего" ребра; л) произвольный граф G и граф G', полученный из него стягиванием любого ребра, не являющегося петлей; м) произвольный связный конечные граф G и букет нескольких окружностей.

Задача 8. Пространства X и Y гомотопически эквивалентны. а) Пусть X связно. Докажите, что Y также связно. б) Пусть X линейно связно. Верно ли, что Y также линейно связно? в) Пусть X и Y разбиты на компоненты связности — представлены в виде объединения нескольких открытых, замкнутых и связных множеств. Докажите, что между множествами компонент связности X и Y имеется взаимно однозначное соответствие.

4. Отображение f_*

Теорема 2. *Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.*

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда всякой петле $\gamma : [0,1] \to X$ соответствует петля $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$.

Задача 9. а) Докажите, что если петли γ_1 и γ_2 гомотопны, то петли $f \circ \gamma_1$ и $f \circ \gamma_2$ также гомотопны. Тем самым возникает отображение $f_* : \pi(X) \to \pi_1(Y)$. б) Докажите, что отображение f_* является гомоморфизмом групп.

Задача 10. Вычислите гомоморфизм f_* для следующих отображений: а) $X = Y = S^1$, $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) X — букет двух окружностей, Y — двумерный тор, $f : X \to Y$ — вложение букета в тор в качестве параллели и меридиана; в) $X = S^1$, $Y = \mathbb{R}P^2 = \{[p:q:r]\}$, $f(\varphi) = [\cos\varphi : \sin\varphi : 0]$; г) $X = S^1$, $Y = \mathbb{R}P^2 = \{[p:q:r]\}$, $f(\varphi) = [\cos\varphi : \sin\varphi : 1]$.

Задача 11. Докажите, что а) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (здесь $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$); б) если f_0 и f_1 гомотопны, то $(f_0)_* = (f_1)_*$; в) теорему 2.