2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задачи, помеченные “П”, принимаются только письменно.

Склейки

Задача 1 (надстройки)**.** Постройте гомеоморфизм а) отрезка $[-1,1]$ со склеенными концами и окружности $S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$, б) надстройки над окружностью, т.е. цилиндра $S^1 \times [-1,1]$, у которого отождествлены все точки верхнего основания $\{(x,1) \mid x \in S^1\}$ и все точки нижнего основания $\{(x,-1) \mid x \in S^1\}$, и двумерной сферы $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, в) n-мерной сферы и надстройки над $(n-1)$-мерной сферой.

Задача 2. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ целых чисел с дискретной топологией и добавим к нему точку ∞, база окрестностей которой состоит из всех множеств $A_N = \{N, N+1, N+2, \dots\} \cup \{\infty\}$; получится новое топологическое пространство $\overline{\mathbb{Z}}$. а) Существует ли в $\mathbb{R}$ подмножество, гомеоморфное $\overline{\mathbb{Z}}$? б) Что такое непрерывное отображение $\overline{\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{R}$? а непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в $\overline{\mathbb{Z}}$?

Задача 3. Постройте гомеоморфизм а) окружности и окружности, у которой попарно отождествлены противоположные точки; б) [П] окружности и окружности, у которой отождествлены наборы из k точек, отстоящих друг от друга на угол $2\pi/k$; здесь k — произвольное натуральное число; в) пространства прямых на плоскости, проходящих через начало координат (уточните топологию в этом пространстве!) и окружности; г) пространства пар точек на прямой, в котором пары (x,y) и (y,x) для всех $x,y \in \mathbb{R}$ отождествляются, и полуплоскости с границей; д) двумерной сферы и плоскости, к которой добавлена новая точка ∞, база окрестностей которой состоит из всех множеств $\Omega_R \stackrel{\text{def}}{=} \{\infty\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2 > R\}$, $R > 0$; е) пространства всех прямых на плоскости (уточните топологию!) и ленты Мебиуса — квадрата $[-1,1] \times (-1,1)$, в котором отождествлены точки $(1,x)$ и $(-1,-x)$ для всех $-1 < x < 1$.

Связность

Топологическое пространство X называется несвязным, если существуют открытые, непустые и не пересекающиеся подмножества $A \subset X, B \subset X$ такие, что $X = A \cup B$.

Задача 4 (П)**.** Разбейте заглавные буквы русского алфавита (для простоты считаем, что шрифт — без засечек) на группы так, чтобы в каждой группе буквы были попарно гомеоморфны, а в разных группах — попарно не гомеоморфны.

Пример рассуждения. Буквы В и Ы не гомеоморфны, т.к. первая связна (это нужно доказать!), а вторая нет. Буквы О и Л не гомеоморфны, т.к. при удалении любой точки из О получается связное пространство (гомеоморфное интервалу — докажите!), а при удалении некоторых точек из Л получается несвязное пространство (гомеоморфное объединению двух непересекающихся полуинтервалов). Буквы П и Л гомеоморфны (постройте гомеоморфизм!).

“Хитрые” пространства

Задача 5. Пространство Зарисского $X = \mathbb{R}$: замкнутыми считаются *конечные* множества (а также само $\mathbb{R}$). а) Проверьте, что это действительно топологическое пространство. б) Связно ли оно? в) Докажите, что в $\mathbb{R}$ с обычной топологией нет подмножества, гомеоморфного X.

Задача 6. а) Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}$ (отличное от пустого и от самого $\mathbb{R}$) является объединением непересекающихся интервалов плюс, возможно, один или два открытых луча. б) Докажите, что множество таких интервалов конечно или счетно.

Задача 7. Пространство $\mathbb{Q}$ рациональных точек прямой. Топология на нем индуцирована топологией множества $\mathbb{R}$, т.е. открытыми подмножествами $\mathbb{Q}$ считаются множества рациональных чисел, лежащих в каком-либо открытом (в обычном смысле) подмножестве $\mathbb{R}$. а) Докажите, что $\mathbb{Q}$ несвязно. б) Докажите, что любое подмножество $A \subset \mathbb{Q}$, содержащее более одной точки, несвязно. в) Докажите, что пространство $\mathbb{Q}$ нельзя разбить на “компоненты связности” — открытые непустые непересекающиеся связные подмножества.

Задача 8. Канторово множество K — пространство действительных чисел на отрезке $[0,1]$, запись которых в виде бесконечной десятичной дроби не содержит цифры 5 (топология, как и в задаче 8, индуцирована топологией $\mathbb{R}$). а) [П] Докажите, что дополнение к K в $\mathbb{R}$ открыто. б) [П] Докажите для K утверждение задачи 7б. в) Докажите, что канторово множество не гомеоморфно множеству рациональных чисел отрезка.