1. ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ.

Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывным, если $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Теорема (о промежуточном значении). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $f(a) = p$ и $f(b) = q$. Тогда для всякого $y \in [p, q]$ найдется $x \in [a, b]$ такое, что $f(x) = y$.*

Задача 1 (теорема о неподвижной точке в размерности 1). Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывное отображение. Докажите, что найдется точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) = x$.

Задача 2 (задача Н.Н. Константинова о возах). Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Две машины, выехавшие из города A по разным дорогам и связанные веревкой длиной 19 метров, смогли добраться до города B, не порвав веревки. Два круглых воза радиусом 10 метров каждый выезжают одновременно по разным дорогам — один из A в B, другой в обратном направлении. Докажите, что возы обязательно столкнутся.

Окружность обозначается S^1. Отображение $f : S^1 \to S^1$ называется непрерывным, если $\forall x \in S^1 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \varrho(x, y) < \delta \Longrightarrow \varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$; здесь $\varrho(a, b)$ означает угол между радиус-векторами точек a и b. Отсюда вытекает, что в приведенных ниже задачах неважно, окружность какого именно радиуса и с каким центром рассматривать. Обычно это будет окружность единичного радиуса с центром в начале координат, она же $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$, она же $\{x \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Задача 3. Докажите, что следующие отображения окружности в окружность (понимаемой как множество комплексных чисел с модулем 1) непрерывны: а) $f(z) = 1$, б) $f(z) = 1/z$, в) $f(z) = az$, где $|a| = 1$, г) $f(z) = z^2$, д) $f(z) = z^n$, где n — произвольное целое число, е) $f(z) = (z^2 + 2)/|z^2 + 2|$.

Задача 4. Пусть $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, сопоставляющее каждому действительному числу x точку окружности, радиус-вектор которой образует угол в $x \bmod 2\pi$ радиан с осью абсцисс. Дайте определение непрерывного отображения прямой в окружность и из окружности в прямую; докажите, что отображение E непрерывно.

Задача 5. Придумайте непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что $f(0) = 0$ и $\mathrm{E} \circ f = g \circ \mathrm{E}$, где g — отображение задачи 3д.

Для произвольного непрерывного отображения $g : S^1 \to S^1$ отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что $\mathrm{E} \circ f = g \circ \mathrm{E}$, называется *поднятием* отображения g.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если оно либо пусто, либо для всякого $x \in A$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ содержится в A.

Задача 6. Докажите, что интервал является открытым множеством, а отрезок — нет.

Задача 7. Докажите, что множество A открыто тогда и только тогда, когда для всякой сходящейся последовательности x_n такой, что $x_n \notin A$ ее предел x также не лежит в A. Решите задачу 6 еще раз, пользуясь этим результатом.

Теорема (о связности прямой). *Если $\mathbb{R} = A \cup B$, причем множества A и B открыты и не пересекаются, то либо $A = \varnothing$, либо $B = \varnothing$.*

Задача 8. Пусть f_1, f_2 — два решения задачи 5 (то есть два поднятия отображения 3д, обладающие свойством $f(0) = 0$). а) Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f_1(x) = f_2(x)$ при $|x| < \varepsilon$. б) Пусть последовательность x_n такова, что $f_1(x_n) = f_2(x_n)$ и $x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n$. Докажите, что $f_1(x) = f_2(x)$. в) Докажите, что множества $\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) = f_2(x)\}$ и $\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$ открыты и выведите отсюда, что $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 9 (единственность поднятия). Пусть f_1, f_2 — два поднятия одного и того же отображения $g : S^1 \to S^1$, причем $f_1(0) = f_2(0)$. Докажите, что f_1 и f_2 совпадают. Что можно сказать про f_1 и f_2, если убрать условие $f_1(0) = f_2(0)$?

Задача 10 (существование поднятия). Пусть $g : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, и $g(1) = 1$. а) Докажите, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ такое, что $f(0) = 0$ и $\mathrm{E} \circ f = g \circ \mathrm{E}$. б) Пусть отображение из пункта 10а существует на интервале (a, b). Докажите, что односторонние пределы $\lim_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim_{x\to b-0} f(x)$ существуют и, тем самым, отображение f можно определить и на отрезке $[a, b]$. в) Докажите, что у каждого непрерывного отображения $g : S^1 \to S^1$ существует поднятие.

Задача 11. Пусть $g : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, а f — его поднятие. Докажите, что величина $(f(2\pi) - f(0))/(2\pi)$ является целым числом и не зависит от выбора поднятия f (а только от отображения g). Эта величина называется индексом (или вращением) отображения g.

Задача 12. Вычислите индексы отображений из задачи 3.

Задача 13. Пусть $g_t : S^1 \to S^1$ — семейство непрерывных отображений, причем для всякой точки $x \in S^1$ точка $g_t(x)$ зависит от числа $t \in \mathbb{R}$ непрерывно. Пусть $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — поднятия этих отображений, обладающие свойством $f_t(0) = 0$ (согласно задачам 9 и 10 эти поднятия существуют и единственны). а) Докажите, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ точка $f_t(x)$ зависит от t непрерывно. б) Докажите, что индексы всех отображений g_t совпадают.

Отображения G_0, G_1, для которых существует семейство $g_t : S^1 \to S^1$, обладающее свойством, описанным в задаче 13 и такое, что $G_0 = g_0$ и $G_1 = g_1$, называются гомотопными. В задаче 13б утверждается, что индексы гомотопных отображений совпадают.

Задача 14. Докажите, что отображения задачи 3в при различных a гомотопны.

Задача 15. Пусть $G_0, G_1 : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, причем $\varrho(G_0(x), G_1(x)) < \pi/2$ при всяком $x \in S^1$. Докажите, что отображения G_0 и G_1 гомотопны.

Отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется непрерывным, если $\forall a \in \mathbb{R}^2\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \varrho(a, b) < \delta \Longrightarrow \varrho(f(a), f(b)) < \varepsilon$; здесь $\varrho(p, q)$ — расстояние между точками p и q.

Обозначим Ω единичный круг с центром в начале координат, а ω_r — окружность радиуса r с центром в начале координат. Пусть $f : \Omega \to \Omega$ — непрерывное отображение.

Задача 16 (теорема о неподвижной точке в размерности 2)**.** а) Пусть $f(x) \neq x$ при $x \in \omega_1$. Для каждого $x \in \omega_1$ положим $g_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x) - x)/\,|f(x) - x|$. Докажите, что отображение $g_1 : \omega_1 \to \omega_1$ гомотопно повороту на π. б) Пусть $f(0) \neq 0$. Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для вектор $f(x) - x$ не сонаправлен вектору $-f(0)$ (в частности, не равен нулю!) при $x \in \omega_\varepsilon$. в) Докажите, что если $\varepsilon > 0$ — как в пункте 16б, то отображение $g_\varepsilon : \omega_\varepsilon \to \omega_1$, определенные тем же способом, что в пункте 16а, гомотопно отображению задачи 3а. г) Докажите, что если при $r_1 < r < r_2$ не существует точек $x \in \omega_r$ таких, что $f(x) = x$, то отображения $g_r : \omega_r \to \omega_1$, определенные все тем же способом, гомотопны друг другу. д) Докажите, что отображения g_1 и g_ε при малых $\varepsilon > 0$ друг другу не гомотопны. Выведите отсюда, что существует точка $x \in \Omega$ такая, что $f(x) = x$.