4. РАЗНЫЕ ПРИМЕРЫ.

1. Двумерная сфера

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — единичная сфера с центром в начале координат, $N \in S^2$ — какая-то точка (северный полюс), а Π — плоскость экватора, т.е. плоскость, проходящая через начало координат и перпендикулярная радиус-вектору точки N. Центральная проекция $S^2 \setminus \{N\} \to \Pi$ из точки N называется стереографической.

Задача 1. Нарисуйте образ при стереографической проекции а) сетки параллелей и меридианов, б) разбиения сферы на 8 сферических треугольников с тремя прямыми углами.

Задача 2. Задайте стереографическую проекцию и обратное к ней отображение формулами (координаты на сфере — широта и долгота, а на плоскости — декартовы).

Говорят, что на плоскости задано векторное поле, если в каждой точке плоскости приложен некоторый вектор, непрерывно зависящий от точки. Говорят, что на сфере задано векторное поле, если в каждой точке приложен некоторый вектор, касающийся сферы именно в этой точке и непрерывно зависящий от точки.

Задача 3. Нарисуйте прообраз при стереографической проекции а) сетки декартовых координат в плоскости Π, б) векторного поля на Π, где в каждой точке приложен вектор единичной длины, направленный в направлении оси x.

Пусть теперь на плоскости Π задана кривая $\gamma : S^1 \to \Pi$ и векторное поле X, не обращающееся в нуль на кривой, т.е. такое, что $X(\gamma(t)) \neq 0$ для всех t. Тогда получается отображение $X_\gamma : S^1 \to S^1$, действующее по формуле $X_\gamma(t) = X(\gamma(t))/\left|X(\gamma(t))\right|$. Степень этого отображения называется *вращением* векторного поля X на кривой γ. Неформально говоря, вращение это количество оборотов, которое вектор $X_\gamma(t)$ делает вокруг нуля, пока t пробегает окружность.

Задача 4. а) Если поле и/или кривую непрерывно деформировать так, чтобы поле все время не имело нулей на кривой, то вращение не меняется. б) Пусть кривая γ получена "умножением" кривых γ_1 и γ_2 (по тем же правилам, что при определении фундаментальной группы, то есть $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$ при $0 \le t \le 1/2$ и $\gamma(t) = \gamma_2(2t-1)$ при $1/2 \le t \le 1$; здесь окружность S^1 представлена как отрезок $[0,1]$ со склеенными концами 0 и 1 и предполагается, что $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2(1)$). Тогда вращение X на γ равно сумме вращений на γ_1 и γ_2.

Задача 5. а) Пусть на сфере задано векторное поле X, а ω — параллель на сфере, южнее которой поле не имеет нулей. Пусть Y — стереографическая проекция поля X, а Ω — параллели ω. Докажите, что вращение Y на Ω равно нулю. б) Пусть теперь ω — параллель, севернее которой поле не имеет нулей. Чему равно вращение Y на Ω?

Пусть X — векторное поле на Π, а $a \in \Pi$ таково, что $X(a) = 0$. Предположим, что в некотором круге D с центром a нет, кроме a, точек, в которых поле равно нулю. Тогда вращение поля X на окружности — границе круга D называется индексом поля в точке a. Нетрудно видеть, что индекс определен корректно — не зависит от выбора круга D.

Задача 6. а) Приведите пример точек индекса 1, 0, 2, -1. б) Докажите, что если поле Y на Π получено стереографической проекцией поля X на сфере, не имеющего нуля в северном полюсе, и имеет конечное количество нулевых точек, то сумма их индексов равна 2.

Указание. Согласно 4, сумма индексов равна индексу поля на окружности достаточно большого радиуса с центром в нуле. Дальше нужно рассмотреть прообраз такой окружности при стереографической проекции и применить результат задачи 5б.

Из задачи 6 вытекает, в частности, "теорема о причесывании ежа": всякое векторное поле на двумерной сфере обращается в нуль по крайней мере в одной точке.

Графом, вложенным в сферу, называется подмножество $A \subset S^2$, гомеоморфное конечному графу (результату какого-либо склеивания конечного количества отрезков — *ребер* — по их концам) и такое, что дополнение $S^2 \setminus A$ гомеоморфно несвязному объединению конечного количества открытых кругов (*граней*).

Задача 7. а) Докажите, что существует граф, вложенный в сферу и гомеоморфный полному графу из 4 вершин. б) Пусть $A \subset S^2$ — вложенный граф. Придумайте на сфере векторное поле, равное нулю в каждой вершине, в одной точке внутри каждого ребра и в одной точке внутри каждой грани, а больше нулей не имеющее. в) Пусть вложенный граф A имеет V вершин, E ребер и F граней. Докажите, что $V - E + F = 2$.

Задача 8. Пусть $K_{3,3}$ — граф, имеющий 6 вершин $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ и 9 ребер — каждая вершина с индексом 1 соединена с каждой вершиной с индексом 2. а) Пусть $A \subset S^2$ — вложенный граф, гомеоморфный $K_{3,3}$. Чему равно количество F граней при вложении? б) Докажите, что на границе каждой грани при вложении лежат не менее 4 ребер, каждое ребро лежит на границе ровно двух граней. в) Докажите, что вложенного графа $A \subset S^2$, гомеоморфного $K_{3,3}$, не существует.

Задача 9. Решите задачу, аналогичную 8, для графа K_5, имеющего 5 вершин, попарно соединенных ребрами.

2. Ручки

Тором называется декартово произведение $S^1 \times S^1$. Ручкой называется тор с дыркой. Сферой с g ручками называется результат приклеивания к сфере с g дырками g ручек по границам дырок. Сфера с одной ручкой это тор.

Задача 10. Докажите, что правильный восьмиугольник, стороны которого попарно отождествлены через одну "без перекрутки" (т.е. отождествлены стороны с номерами 1 и 3, 2 и 4, 5 и 7, 6 и 8; при отождествлении сторон склеиваются их точки, находящиеся на одном и том же расстоянии от вершин, считая по часовой стрелке), гомеоморфен сфере с 2 ручками.

Указание. Разрежьте восьмиугольник пополам по главной диагонали.

Задача 11. Докажите, что $4g$-угольник, стороны которого попарно отождествлены через одну "без перекрутки" (аналогично задаче 10, гомеоморфен сфере с g ручками.

Задача 12. Докажите, что правильный шестиугольник, противоположные стороны которого отождествлены "без перекрутки", гомеоморфен тору.

Указание. Соедините две противоположные стороны шестиугольника полосой.

Задача 13. Докажите, что сфера с g ручками и одной дыркой гомотопически эквивалентна букету из $2g$ окружностей.

Лентой Мебиуса называется квадрат, две противоположные стороны которого склеены "с перекруткой". Граница ленты Мебиуса гомеоморфна окружности (докажите), поэтому ею тоже можно заклеить дырку. Проективная плоскость гомеоморфна квадрату, у которого обе пары противоположных сторон склеены "с перекруткой".

Задача 14. Докажите, что сфера с одной дыркой, заклеенной лентой Мебиуса, гомеоморфна проективной плоскости.

Задача 15. Докажите, что сфера S^2 с тремя дырками, заклеенными лентой Мебиуса, гомеоморфна тору с одной дыркой, заклеенной лентой Мебиуса, и гомеоморфна проективной плоскости с 1 ручкой.

3. Трехмерная сфера

Трехмерная сфера $S^3 \overset{\text{def}}{=} \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$. Если рассматривать комплексные числа $z = a + bi$ и $w = c + di$, то $\mathbb{R}^4$ отождествляется с $\mathbb{C}^2$, и трехмерная сфера может быть представлена как $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

Рассмотрим отображение (*расслоение Хопфа*) $f : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, заданное формулой $f(z, w) = [z : w]$. Заметим, что оно определено на всей сфере, т.к. $z = w = 0$ при $(z, w) \in S^3$ невозможно.

Задача 16. а) Докажите, что для всякой точки $a \in \mathbb{C}P^1$ ее прообраз $f^{-1}(a)$ (*слой* расслоения Хопфа) гомеоморфен окружности. б) Докажите, что прообраз $f^{-1}(\omega_a)$, где $\omega_a = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| = a\}$ (окружность), гомеоморфен двумерному тору. в) Докажите, прообраз $f^{-1}(D_a)$, где $D_a = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \le a\}$ (круг), гомеоморфен полноторию (декартову произведению $D \times S^1$ круга на окружность).

Граница полнотория $D \times S^1$ — тор $\partial D \times S^1$, где ∂D — граница круга D. Зафиксируем точки $a \in S^1$, и $b \in \partial D$. Линия $\partial D \times a$ называется меридианом тора, а $b \times S^1$ — параллелью. Разрезав тор по параллели и меридиану, мы получим его представление как квадрата, противоположные стороны которого склеены (без перекрутки).

Задача 17. Докажите, что слой расслоения Хопфа пересекает каждую параллель и каждый меридиан тора ровно в одной точке. Отсюда следует, что это окружность, гомотопная диагонали такого квадрата.

Задача 18. Сферу S^3 без точки $(0, 1)$ можно отождествить с трехмерным пространством $\mathbb{R}^3$ посредством стереографической проекции. а) Задайте эту проекцию формулами. б) Нарисуйте разбиение получившегося трехмерного пространства на слои расслоения Хопфа.

4. Разное

Задача 19. а) Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ двумерную сферу $Q = \{(z,w) \mid |z-1|^2 + |w|^2 = 1, \overline{w} = w\}$. Докажите, что каждая прямая в $\mathbb{C}^2$, проходящая через начало координат, кроме одной (какой?), пересекает Q ровно в двух точках, одна из которых — начало координат. Выведите отсюда, что пространство $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно S^2. б) Сферу Q можно отождествить со стандартной сферой $S^2 = \{(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \mid p^2 + q^2 + r^2 = 1\}$ посредством отображения $p = \operatorname{Re} z - 1$, $q = \operatorname{Im} z$, $r = w$. Тем самым получается взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{C}P^1 \to S^2$. Опишите прообразы полюсов, экватора и меридианов при этом отображении.

Указание. Комплесная прямая, проходящая через начало координат и точку (z_0, w_0) это $\{(\lambda z_0, \lambda w_0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Задача 20. а) Докажите, что множество всех прямых в $\mathbb{R}^2$ (не обязательно проходящих через начало координат) гомеоморфно ленте Мебиуса без границы. б) Опишите похожим образом множество всех прямых в $\mathbb{R}^3$. в) Докажите, что множество проективных прямых на проективной плоскости гомеоморфно проективной плоскости. Как в этом множестве расположены прямые, перечисленные в пункте 20а? А прямые, проходящие через начало координат?