

ПИСЬМЕННЫЙ ЗАЧЕТ 3 МАРТА 2009 Г.

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Назовем подмножество $A \subset \mathbb{R}$ замкнутым, если оно пусто, конечно или совпадает со всем \mathbb{R} . Как обычно, множество $B \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если $\mathbb{R} \setminus B$ замкнуто. Докажите, что получившееся топологическое пространство компактно.

Задача 2. Шарнирный механизм состоит из двух стержней длины 1 которые могут двигаться только в верхней полуплоскости (см. рисунок). Конец первого стержня закреплен в начале координат, а конец второго скользит по оси абсцисс (и может при необходимости проходить через начало координат). Докажите, что пространство положений механизма гомеоморфно букве X.

Задача 3. В \mathbb{R}^3 действует группа G всех поворотов вокруг оси OZ . Вычислите фундаментальную группу пространства ее орбит.

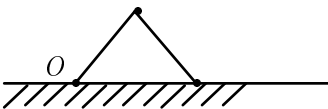
Задача 4. Докажите, что множество $\{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, |z|^2 + t^2 = 1, |t| \leq |z|\}$ гомеоморфно цилиндру, т.е. декартову произведению отрезка на окружность.

Задача 5. Точками топологического пространства X являются упорядоченные наборы из трех попарно различных точек $A, B, C \in \Phi$, где фигура Φ изображена на рисунке. Докажите, что пространство X линейно связно.

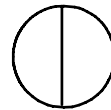
Задача 6. а) Петля $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ гомотопна петле $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$ (здесь $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$; имеется в виду гомотопия петель, т.е. отображений отрезка в окружность таких, что $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$). Докажите, что петля γ проходит через все точки окружности. б) Петля $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ гомотопна петле $\gamma_2(t) = e^{4\pi it}$. Докажите, что γ проходит через каждую точку окружности по крайней мере два раза.

Вопросы и ответы

- В. Какими материалами можно пользоваться во время работы?
- О. Любыми. Нельзя прибегать к посторонней помощи.
- В. Какие факты можно использовать без доказательства?
- О. Стандартные факты из курса: отрезок связен, линейно связное пространство связно, $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ тривиальна, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ и т.п. В любом случае, если вы используете факт без доказательства, ссылайтесь на него явно (“... , потому что отрезок связен”).
- В. Какая топология в пространстве положений шарнирного механизма из задачи 2?
- О. Пусть A, B — подвижные концы шарниров. ε -окрестностью данного положения называется множество всех положений механизма, в котором концы лежат в точках A', B' таких, что расстояния $\varrho(A, A')$ и $\varrho(B, B')$ меньше ε . Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит ее ε -окрестность для некоторого $\varepsilon > 0$.
- В. Какая топология в пространстве наборов точек A, B, C из задачи 5?
- О. ε -окрестностью данного набора A, B, C называется множество всех наборов A', B', C' таких, что расстояния $\varrho(A, A')$, $\varrho(B, B')$ и $\varrho(C, C')$ меньше ε (имеются в виду расстояния на плоскости). Множество называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит ее ε -окрестность для некоторого $\varepsilon > 0$.
- В. Можно выйти?
- О. Можно.



Шарнирный механизм (задача 2)

Фигура Φ (задача 5)