13. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Дробно-линейные преобразования

Задача 1. Пусть A, B, C, D — точки на прямой $y = 1$. Докажите, что их двойное отношение равно $\frac{\sin \widehat{AOD} \sin \widehat{BOC}}{\sin \widehat{COD} \sin \widehat{AOB}}$.

Задача 2. Группа S_4 перестановок четырех элементов действует на наборах из четырех различных точек проективной прямой: если $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ — перестановка, то $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ по определению — четверка $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$. а) Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}^1$ и $[x_1, x_2, x_3, x_4] = t$. Докажите, что для каждой перестановки $\sigma \in S_4$ значение $[\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)]$ зависит только t и σ. Обозначим это значение $f_\sigma(t)$. б) Докажите, что соответствие $\sigma \mapsto f_\sigma(t)$ — гомоморфизм группы S_4 в группу дробно-линейных преобразований. в) Вычислите ядро $\operatorname{Ker} f$ этого гомоморфизма и проверьте явно, что оно является в S_4 нормальной подгруппой. г) Перечислите явно дробно-линейные преобразования, входящие в образ $\operatorname{Im} f$ этого гомоморфизма; проверьте явно равенство $\operatorname{Im} f = S_4/\operatorname{Ker} f$.

Задача 3. Докажите, что точки $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{(s-p)(q-r)}{(s-r)(q-p)}$ вещественно.

Указание. Аргумент комплексного числа $\frac{z-a}{z-b}$ равен $\widehat{azb}$.

Задача 4. Докажите, что дробно-линейные преобразования $\mathbb{C}$ переводят окружности и прямые в окружности и прямые.

Задача 5. Докажите, что дробно-линейное преобразование $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ переводит единичный круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ в верхнюю полуплоскость $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0\}$. Выпишите обратное преобразование (оно, тем самым, переводит верхнюю полуплоскость в круг).

Задача 6. При каких условиях на коэффициенты a, b, c, d дробно-линейное преобразование $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ переводит верхнюю полуплоскость в себя?

Проективная плоскость и трехмерное проективное пространство

Задача 7. Пусть $L = \{(x, y) \mid Q(x, y) = 0\}$ — кривая второго порядка (Q — многочлен степени 2). Проективным замыканием L называется кривая на проективной плоскости $\overline{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{[x : y : z] \mid z^2 Q(x/z, y/z) = 0\}$. а) Докажите, что бесконечно удаленная прямая в $\mathbb{R}P^2$ не пересекает проективное замыкание эллипса, пересекает проективное замыкание гиперболы в двух точках, а проективное замыкание параболы — в одной точке (т.е. касается). б) Опишите проективные замыкания остальных кривых второго порядка.

Задача 8. Постройте пример проективного преобразования или докажите, что его не существует: а) переводящего окружность $x^2+y^2 = 1$ в гиперболу, б) в параболу, в) в пару параллельных прямых, г) переводящего сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в двуполостной гиперболоид, д) в однополостной гиперболоид, е) в эллиптический параболоид, ж) в гиперболический параболоид. Для каждого преобразования укажите, какие точки переходят в бесконечно удаленные.

Задача 9 (теорема Паппа)**.** Если точки a_1, b_1, c_1 лежат на одной прямой, а точки a_2, b_2, c_2 — также на одной прямой, то точки $a_1b_2 \cap a_2b_1$, $a_1c_2 \cap a_2c_1$, $b_1c_2 \cap b_2c_1$ также лежат на одной прямой.

Задача 10 (теорема Брианшона)**.** Докажите, что большие диагонали шестиугольника, описанного около конического сечения (например, окружности), пересекаются в одной точке.

Задача 11 (теорема Паскаля)**.** Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — шестиугольник, вписанный в коническое сечение (например, окружность). Докажите, что точки $A_1A_2 \cap A_4A_5$, $A_2A_3 \cap A_5A_6$, $A_3A_4 \cap A_6A_1$ лежат на одной прямой.

Задача 12. а) Перечислите все линейные преобразования $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющие квадратичную форму $Q(x, y) = x^2 - y^2$ (т.е. такие, что $Q(Av) = Q(v)$ для всякого вектора $v = (x, y)$). б) Рассмотрим квадратичную форму $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть $v_0 = (0, 0, 1)$, а $v \in \mathbb{R}^3$ — произвольный вектор, для которого $Q(v) = -1$. Докажите, что существует линейное преобразование $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, сохраняющее форму Q и такое, что $Av_0 = v$. в) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — единичный круг с центром в начале координат O.

Докажите, что для всякой точки $A \in \Omega$ существует проективное преобразование $\mathbb{R}^2$, переводящее Ω в себя, а O в A. г) Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — единичная окружность с центром в начале координат O. Докажите, что если проективное преобразование переводит ω в себя, то оно переводит круг Ω в себя.

Проективная двойственность

В качестве билинейной формы на $\mathbb{R}^3$ выберем $B((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2$; отождествим $\mathbb{R}^2$ с аффинной плоскостью $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Тогда прямая, двойственная к точке $p = [a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$, это $p\check{} = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}P^2 \mid ax + by - cz = 0\}$.

Задача 13. а) Докажите, что точка $p \in \mathbb{R}P^2$ лежит на окружности $\omega = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ тогда и только тогда, когда прямая $p\check{}$ касается этой окружности. б) Тот же вопрос для произвольного конического сечения. в) Докажите, что множество точек $p \in \mathbb{R}P^2$ таких, что прямая $p\check{}$ касается кривой второго порядка Q, заданной уравнением $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, образует кривую второго порядка $Q\check{}$. Выпишите явно уравнение кривой $Q\check{}$ в случае, когда Q — окружность $x^2 + y^2 = 1$, гипербола $x^2 - y^2 = 1$ и парабола $y = x^2$. г) Докажите, что $(Q\check{})\check{} = Q$.

Задача 14. Какое утверждение получится, если в а) теореме Паппа (задача 9), б) теореме Брианшона (задача 10), в) теореме Паскаля (задача 11) заменить все объекты (точки, прямые и квадрики) двойственными?