12. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА.

Задача 1. Докажите, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество.

Задача 2. Докажите, что всякое непустое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}$ есть отрезок, интервал, полуинтервал, луч или вся прямая.

Задача 3. Докажите, что выпуклый многоугольник на плоскости, не лежащий на одной прямой и такой, что любые две его вершины соединены стороной, является треугольником.

Задача 4. Докажите, что если точка a принадлежит грани F выпуклого множества X и является выпуклой комбинацией некоторых точек $a_1, \dots, a_k \in X$ с ненулевыми коэффициентами, то обязательно $a_1, \dots, a_k \in F$.

Задача 5. Докажите, что выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, любые две вершины которого соединены ребром, является тетраэдром.

Указание. Пусть многогранник содержит вершины a_1, a_2, a_3, a_4. Если он не тетраэдр, то один из треугольников — для определенности $a_1a_2a_3$ — не является гранью. Тогда существует (почему?) вершина a_5 такая, что отрезок a_4a_5 пересекает плоскость $a_1a_2a_3$. Рассмотрите возможное расположение точки пересечения и придите к противоречию с утверждением задачи 4.

Задача 6 (теорема Радона на плоскости)**.** На плоскости даны $m \geq 4$ точек $a_1, \dots, a_m$. Докажите, что их можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 7. Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, причем $m \geq n + 2$. Докажите, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$.

Указание. Векторы $a_2 - a_1, \dots, a_m - a_1 \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы (поскольку их $\geq n + 1$ штук).

Задача 8 (теорема Радона)**.** Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, причем $m \geq n + 2$. Докажите, что точки $a_1, \dots, a_m$ можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 9 (теорема Хелли)**.** Пусть $M_1, \dots, M_m \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества, $m \geq n + 1$. Известно, что пересечение любых $n + 1$ множества M_i непусто. Докажите, что пересечение всех множеств M_i непусто.

Указание. Используйте задачу 8. Используя вместо нее задачу 6, получим теорему Хелли на плоскости.

Задача 10. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — параллельные отрезки на плоскости, $m \geq 3$. Известно, что для любых трех отрезков существует пересекающая их прямая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.