

**11<sup>1</sup>/2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПЕРЕВОДЯЩИЕ ПРЯМЫЕ В ПРЯМЫЕ.**

(ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ЛИСТОК)

Целью данного листка является доказательство следующей теоремы:

**Теорема.** Пусть  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — обратимое преобразование, переводящее прямые в прямые. Тогда  $F$  аффинно, т.е. существует линейное преобразование  $A$  и вектор  $b$  такие, что  $F(v) = Av + b$  для всякого  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Пусть сперва  $n = 2$ .

**Задача 1.** а) Докажите, что преобразование  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  переводит параллельные прямые в параллельные прямые. б) Докажите, что если  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ , то  $\overrightarrow{F(P)F(Q)} = \overrightarrow{F(R)F(S)}$ .

Теорема для  $n = 2$  вытекает из следующей леммы:

**Лемма.** Пусть преобразование  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  обратимо, переводит прямые в прямые и переводит точки  $O(0, 0)$ ,  $P(1, 0)$  и  $Q(0, 1)$  в себя. Тогда  $F$  — тождественное отображение ( $F(v) = v$  для всех  $v \in \mathbb{R}^2$ ).

**Задача 2.** Выведите теорему для  $n = 2$  из леммы.

**Указание.** Пусть  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — обратимое преобразование, переводящее прямые в прямые. Пусть  $F(O) = O'$ ,  $F(P) = P'$  и  $F(Q) = Q'$ . Найдите преобразование  $G(v) = Av + b$  такое, что  $G(O') = O$ ,  $G(P') = P$  и  $G(Q') = Q$  и рассмотрите композицию  $G \circ F$ .

Теперь докажем лемму.

**Задача 3.** Пусть  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — преобразование из леммы. Докажите, что оно переводит в себя оси  $OX$  и  $OY$ , а также прямую  $y = 1$ .

Тем самым существует отображение  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что  $F(t, 0) = (\varphi(t), 0)$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

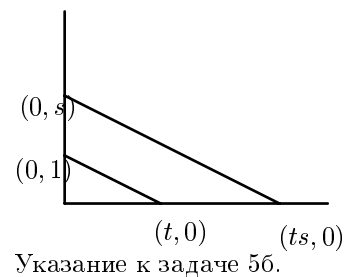
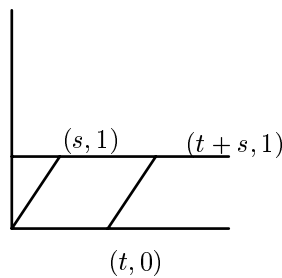
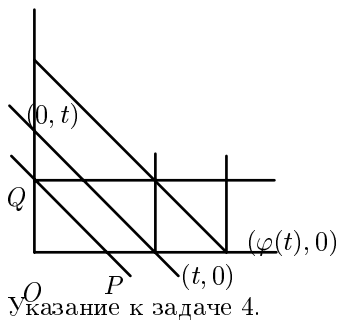
**Задача 4.** Докажите, что а)  $F(0, t) = (0, \varphi(t))$ . б)  $F(t, 1) = (\varphi(t), 1)$ .

**Задача 5.** Докажите, что а)  $\varphi(t + s) = \varphi(t) + \varphi(s)$ ; б)  $\varphi(ts) = \varphi(t)\varphi(s)$ .

**Задача 6.** а) Докажите, что  $\varphi(n) = n$  для любого  $n \in \mathbb{Z}$ . б) Докажите, что  $\varphi(t) = t$  для любого  $t \in \mathbb{Q}$ . в) Докажите, что если  $t > 0$ , то  $\varphi(t) > 0$ . г) Докажите, что если  $t > s$ , то  $\varphi(t) > \varphi(s)$ . д) Докажите, что  $\varphi(t) = t$  для всякого  $t \in \mathbb{R}$ .

**Указание.** К пункту бв: рассмотрите  $\varphi(\sqrt{t})$ .

**Задача 7.** Докажите лемму.



Тем самым теорема для  $n = 2$  доказана. Теперь  $n$  произвольно.

**Задача 8.** Пусть преобразование  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  обратимо и переводит прямые в прямые. Докажите для  $F$  утверждение задачи 1б.

Тем самым определено отображение  $\Phi$  множества векторов в  $\mathbb{R}^n$  в себя: для произвольного вектора  $v$  выберем точки  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  такие, что  $\overrightarrow{PQ} = v$ , и положим  $\Phi(v) = \overrightarrow{F(P)F(Q)}$ .

**Задача 9.** Докажите, что а)  $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$ ; б)  $\Phi(\lambda v) = \lambda\Phi(v)$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

То есть преобразование  $\Phi$  линейное:  $\Phi(v) = Av$  для некоторой матрицы  $A$ .

**Задача 10.** Пусть  $F(0) = b$ . Докажите, что  $F(P) = AP + b$  для всякой точки  $P$  (в правой части символом  $P$  обозначен радиус-вектор точки  $P$ ).

Тем самым теорема доказана.

**Задача 11.** Используя теорему, докажите “групповые” утверждения из лекции 2, не используя явного представления аффинных преобразований в виде  $F(v) = Av + b$ . А именно, докажите, что а) аффинные преобразования образуют группу  $\text{Aff}(n)$ , б) аффинные преобразования, переводящие данную точку  $q$  в себя, образуют в  $\text{Aff}(n)$  подгруппу, изоморфную группе  $\text{GL}(n)$  обратимых линейных операторов в  $\mathbb{R}^n$ , в) параллельные переносы образуют в  $\text{Aff}(n)$  нормальную подгруппу, фактор по которой изоморфен  $\text{GL}(n)$ , г) обратимые линейные операторы в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , переводящие в себя аффинную гиперплоскость  $L$ , не проходящую через начало координат, образуют группу, изоморфную  $\text{Aff}(n)$ .