$11^1/_2$. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПЕРЕВОДЯШИЕ ПРЯМЫЕ В ПРЯМЫЕ.

(дополнительный листок)

Целью данного листка является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Пусть $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — обратимое преобразование, переводящее прямые в прямые. Тогда F аффинно, т.е. существует линейное преобразование A и вектор b такие, что $F(v)=Av+b$ для всякого $v\in\mathbb{R}^n$.*

Пусть сперва $n=2$.

Задача 1. а) Докажите, что преобразование $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ переводит параллельные прямые в параллельные прямые. б) Докажите, что если $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$, то $\overrightarrow{F(P)F(Q)}=\overrightarrow{F(R)F(S)}$.

Теорема для $n=2$ вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Пусть преобразование $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ обратимо, переводит прямые в прямые и переводит точки $O(0,0)$, $P(1,0)$ и $Q(0,1)$ в себя. Тогда F — тождественное отображение ($F(v)=v$ для всех $v\in\mathbb{R}^2$).*

Задача 2. Выведите теорему для $n=2$ из леммы.

Указание. Пусть $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — обратимое преобразование, переводящее прямые в прямые. Пусть $F(O)=O'$, $F(P)=P'$ и $F(Q)=Q'$. Найдите преобразование $G(v)=Av+b$ такое, что $G(O')=O$, $G(P')=P$ и $G(Q')=Q$ и рассмотрите композицию $G\circ F$.

Теперь докажем лемму.

Задача 3. Пусть $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — преобразование из леммы. Докажите, что оно переводит в себя оси OX и OY, а также прямую $y=1$.

Тем самым существует отображение $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такое, что $F(t,0)=(\varphi(t),0)$ для всех $t\in\mathbb{R}$.

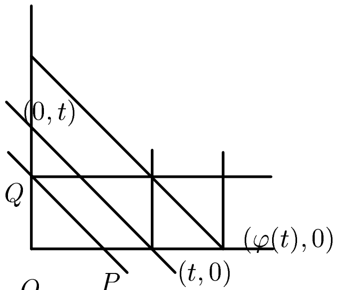
Задача 4. Докажите, что а) $F(0,t)=(0,\varphi(t))$. б) $F(t,1)=(\varphi(t),1)$.

Задача 5. Докажите, что а) $\varphi(t+s)=\varphi(t)+\varphi(s)$; б) $\varphi(ts)=\varphi(t)\varphi(s)$.

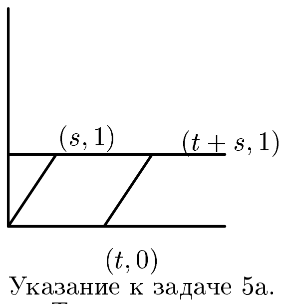
Задача 6. а) Докажите, что $\varphi(n)=n$ для любого $n\in\mathbb{Z}$. б) Докажите, что $\varphi(t)=t$ для любого $t\in\mathbb{Q}$. в) Докажите, что если $t>0$, то $\varphi(t)>0$. г) Докажите, что если $t>s$, то $\varphi(t)>\varphi(s)$. д) Докажите, что $\varphi(t)=t$ для всякого $t\in\mathbb{R}$.

Указание. К пункту 6в: рассмотрите $\varphi(\sqrt{t})$.

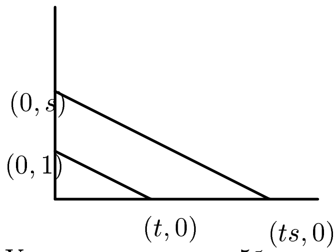
Задача 7. Докажите лемму.



Указание к задаче 4.



Указание к задаче 5а.



Указание к задаче 5б.

Тем самым теорема для $n=2$ доказана. Теперь n произвольно.

Задача 8. Пусть преобразование $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ обратимо и переводит прямые в прямые. Докажите для F утверждение задачи 1б.

Тем самым определено отображение Φ множества *векторов* в $\mathbb{R}^n$ в себя: для произвольного вектора v выберем точки $P,Q\in\mathbb{R}^n$ такие, что $\overrightarrow{PQ}=v$, и положим $\Phi(v)=\overrightarrow{F(P)F(Q)}$.

Задача 9. Докажите, что а) $\Phi(v_1+v_2)=\Phi(v_1)+\Phi(v_2)$; б) $\Phi(\lambda v)=\lambda\Phi(v)$, где $\lambda\in\mathbb{R}$.

То есть преобразование Φ линейное: $\Phi(v) = Av$ для некоторой матрицы A.

Задача 10. Пусть $F(0) = b$. Докажите, что $F(P) = AP + b$ для всякой точки P (в правой части символом P обозначен радиус-вектор точки P).

Тем самым теорема доказана.

Задача 11. Используя теорему, докажите "групповые" утверждения из лекции 2, не используя явного представления аффинных преобразований в виде $F(v) = Av+b$. А именно, докажите, что а) аффинные преобразования образуют группу $\mathrm{Aff}(n)$, б) аффинные преобразования, переводящие данную точку q в себя, образуют в $\mathrm{Aff}(n)$ подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{GL}(n)$ обратимых линейных операторов в $\mathbb{R}^n$, в) параллельные переносы образуют в $\mathrm{Aff}(n)$ нормальную подгруппу, фактор по которой изоморфен $\mathrm{GL}(n)$, г) обратимые линейные операторы в $\mathbb{R}^{n+1}$, переводящие в себя аффинную гиперплоскость L, не проходящую через начало координат, образуют группу, изоморфную $\mathrm{Aff}(n)$.