11. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Задача 1. а) Докажите, что для всякой трапеции существует аффинное преобразование, переводящее ее в равнобокую. б) Докажите, что во всякой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Задача 2. В пятиугольнике $ABCDE$ все диагонали параллельны противолежащим сторонам. Пусть $AC \cap BE = P$ и $AD \cap BE = Q$. Найдите отношение PQ/BE.

Задача 3. а) Докажите, что образ эллипса при любом аффинном преобразовании — эллипс. б) Докажите, что для любого эллипса существует аффинное преобразование, переводящее его в окружность. Выведите отсюда, что любые два эллипса можно перевести друг в друга аффинным преобразованием. в) Докажите, что аффинное преобразование переводит центр симметрии эллипса в центр симметрии эллипса. г) Пусть A — точка вне эллипса, прямые AB_1 и AB_2 — касательные к эллипсу, причем точки B_1 и B_2 принадлежат эллипсу. Докажите, что точка A, центр эллипса и середина отрезка B_1B_2 лежат на одной прямой. д) Пусть E — эллипс, а $A, B \in E$. Докажите, что существует и единственно аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию, переводящее эллипс E в себя, а точку A в точку B.

Задача 4. а) Докажите, что образ параболы при аффинном преобразовании — парабола. б) Докажите, что любые две параболы можно перевести друг в друга аффинным преобразованием. в) Докажите, что образ оси параболы при аффинном преобразовании — прямая, параллельная оси параболы-образа. г) Пусть P — парабола, и $A, B \in P$. Докажите, что существует и единственно аффинное преобразование, сохраняющее ориентацию, переводящее параболу P в себя, а точку A в точку B. д) [П] Пусть A — точка вне параболы, прямые AB_1 и AB_2 — касательные к параболе, причем точки B_1 и B_2 принадлежат параболе. Докажите, что прямая, соединяющая A и середину отрезка B_1B_2, параллельна оси параболы.

Задача 5. а) Сформулируйте и докажите аналог задач 3а и 4а для гиперболы. б) То же самое, задач 3б и 4б. в) То же самое, задач 3в и 4в. г) То же самое, задач 3д и 4г. д) [П] То же самое, задач 3г и 4д.

Задача 6 (П). Пусть A — точка на эллипсе, A' — точка, симметричная A относительно центра эллипса, ℓ — прямая, проходящая через центр эллипса и параллельная касательным к эллипсу в точках A и A'; B и B' — точки пересечения прямой ℓ с эллипсом. Докажите, что касательные к эллипсу в точках B и B' параллельны прямой AA'.

Задача 7. а) Пусть E — эллипсоид в трехмерном пространстве, и $A \in E$. Докажите, что существует октаэдр, все вершины которого лежат на эллипсоиде, A — одна из его вершин, и касательная к эллипсоиду в каждой вершине параллельна плоскости, проходящей через четыре вершины октаэдра. б) Докажите, что такой октаэдр единствен и центрально-симметричен относительно центра эллипсоида.

Задача 8. а) Докажите, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке (называемой центром тяжести треугольника), и эта точка делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. б) Докажите, что при аффинном преобразовании центр тяжести треугольника переходит в центр тяжести треугольника-образа. в) Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с центром тяжести противолежащей грани. Докажите, что четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (называемой центром тяжести тетраэдра), которая делит каждую медиану в отношении $3:1$, считая от вершины. Докажите, что при аффинном преобразовании центр тяжести тетраэдра переходит в центр тяжести тетраэдра-образа. г) [П] Медианой n-мерного симплекса называется отрезок, соединяющий его вершину с центром тяжести противолежащей грани (которая является $(n-1)$-мерным симплексом). Докажите, что все $(n+1)$ медианы симплекса пересекаются в одной точке (называемой центром тяжести симплекса), которая делит каждую из них в отношении $n:1$, считая от вершины. При аффинном преобразовании центр тяжести переходит в центр тяжести симплекса-образа.

Задача 9. Докажите, что параллельные аффинные подпространства $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^n$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Задача 10. Линейное преобразование $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переводит в себя а) прямую $y = 1$, б) [П] прямую $x = y$. Напишите условие, которому должна удовлетворять матрица $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ этого преобразования. Проверьте явно, что множество таких матриц образует группу и постройте явный изоморфизм этой группы и группы линейных неоднородных (аффинных) отображений $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.