ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Проективные преобразования.

Как и в предыдущей лекции, V — векторное пространство размерности $n+1$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Проективным подпространством $\mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$ называется множество прямых $\ell \subset U \subset V$, где $U \subset V$ — какое-нибудь векторное подпространство. Размерностью $\mathbb{P}U$ называется $\dim U - 1$; в частности, если U двумерно, то $\overline{U}$ называется проективной прямой (в $\mathbb{P}V$).

Назовем набор точек $a_1, \dots, a_{n+2} \in \mathbb{P}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}V$ набором общего положения, если никакие $n+1$ из этих точек не лежат в собственном проективном подпространстве $H \subset \mathbb{P}^n$.

Пример 1. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{P}^1$ — набор общего положения, если точки попарно различны (точка это нульмерное проективное подпространство). $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{P}^2$ — набор общего положения, если никакие три точки не лежат на одной прямой.

Теорема 1. *Для любых двух наборов $a_1, \dots, a_{n+2}$ и $b_1, \dots, b_{n+2}$ точек общего положения существует ровно одно проективное преобразование $B \in \mathrm{PGL}(V)$, переводящее $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \dots, n+2$.*

Доказательство. Выберем ненулевые векторы $u_i \in a_i$, $v_i \in b_i$, $i = 1, \dots, n+2$. Поскольку точки $a_1, \dots, a_{n+1}$ не лежат в собственном проективном подпространстве, векторы $u_1, \dots, u_{n+1}$ образуют базис в V. Поэтому найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ такие, что $u_{n+2} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Если $\lambda_k = 0$ для какого-либо k, то $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+2}$ лежат в подпространстве $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, порожденном n векторами $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+1}$. Но $\dim V = n+1 > n$, поэтому $H \neq V$, что противоречит условию общего положения для точек $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n+2}$. Следовательно, среди $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ нет нулей. Аналогично, найдутся $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$, не равные нулю и такие, что $v_{n+2} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n+1} v_{n+1}$.

Определим линейный оператор $X : V \to V$ равенствами $X u_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} v_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Поскольку $u_1, \dots, u_{n+1}$ — базис, эти условия определяют X однозначно. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, оператор X обратим. Очевидно, $\overline{X}(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+1$. Теперь $X u_{n+2} = \sum_i \lambda_i X u_i = \sum_i \mu_i v_i = v_{n+2}$. Отсюда вытекает, что $\overline{X}(a_{n+2}) = b_{n+2}$.

С другой стороны, если $\overline{Y}(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+2$, то $Y u_i = y_i v_i$ для всех i. Условие $Y u_{n+2} = y_{n+2} v_{n+2}$ означает, что $\sum_{i=1}^{n+1} y_i \lambda_i v_i = y_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i$. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, получаем $y_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} y_{n+2}$, откуда следует, что $Y = y_{n+2} X$ и $\overline{Y} = \overline{X}$. □

Вот пример применения теоремы 1:

Теорема (Дезарга)**.** *Пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Утверждение теоремы Дезарга является проективно инвариантным — если оно верно для какой-либо конфигурации, то верно и для всех конфигураций, получающихся из данной проективным преобразованием. В силу теоремы 1 можно проективным преобразованием отправить две произвольных точки на бесконечно удаленную прямую. Сделаем это с точками $ab \cap a'b'$ и $bc \cap b'c'$. Тогда получится такое (очевидное) утверждение: пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в точке o, прямая ab параллельна прямой $a'b'$, прямая bc параллельна прямой $b'c'$. Тогда прямая ac параллельна прямой $a'c'$. □

Пусть $U \subset V$ — векторное подпространство размерности n. Зафиксируем в V базис $e_0, e_1, \dots, e_n$ такой, что $e_1, \dots, e_n$ лежат в U (и образуют там базис). Тогда точки пространства $\mathbb{P}V$ соответствуют наборам однородных координат $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$; точка лежит в проективном подпространстве $\mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$, если $x_0 = 0$. Если $x_0 \neq 0$, то прямая, соответствующая точке $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$, пересекает аффинное пространство (размерности n) $e_0 + U$ в единственной точке с координатами $(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Тем самым построено взаимно однозначное соответствие $\mu : L \to e_0 + U$, где $L = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}U$. Это соответствие естественно в следующем смысле:

Теорема 2. *Пусть $\dim V = n+1$, и $U \subset V$ — гиперплоскость (подпространство размерности n). Множество $\mathrm{Norm}_{\mathbb{P}U} \subset \mathrm{PGL}(\mathbb{P}V)$ проективных преобразований $A : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ таких, что $A\mathbb{P}U = \mathbb{P}U$, образует группу, изоморфную группе аффинных преобразований n-мерного пространства.*

Доказательство. Если $A\mathbb{P}U = \mathbb{P}U$ и $B\mathbb{P}U = \mathbb{P}U$, то таким же свойством обладают преобразования AB и A^{-1} — следовательно, $\mathrm{Norm}_{\mathbb{P}U}$ это группа.

Пусть теперь $A \in \mathrm{Norm}_{\mathbb{P}U}$ и $A = \overline{X}$, где $X : V \to V$ — линейное преобразование; очевидно, $XU = U$. Введем в V базис $e_0, e_1, \dots, e_n$ так, чтобы U было порождено векторами $e_1, \dots, e_n$. Тогда матрица X в этом базисе выглядит так: $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$, а $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — обратимая матрица $n \times n$. Поскольку X определено с точностью до умножения на константу, без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 1$. Следовательно, проективное преобразование A в однородных координатах выглядит так: $A([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) = [x_0 : (b_1 x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) : \dots : (b_n x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)]$. Следовательно, в аффинном подпространстве $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}U = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_0 \neq 0\}$ с неоднородными координатами $y_1 = x_1/x_0, \dots, y_n = x_n/x_0$ преобразование A аффинно: $A(y_1, \dots, y_n) = (b_1 + a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \dots, b_n + a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n)$. Как очевидно (а почему очевидно?), всякое аффинное преобразование можно получить таким способом, так что имеет место требуемый изоморфизм. $\square$

Введем теперь в пространстве V невырожденную билинейную форму (скалярное произведение) B. Тогда каждому векторному подпространству $U \subset V$ (произвольной размерности) соответствует ортогональное дополнение $U^\perp = \{y \in V \mid \forall x \in U\, B(x,y) = 0\}$. Проективные подпространства $H_1 = \mathbb{P}U \subset \mathbb{P}V$ и $H_2 = \mathbb{P}U^\perp \subset \mathbb{P}V$ называются проективно двойственными (пишут $H_2 = \check{H_1}$); сумма их размерностей равна $\dim V - 2 = \dim \mathbb{P}V - 1$. В частности, к точке $p \in \mathbb{P}V$ двойственна (проективная) гиперплоскость.

Если точка $q \in V$, $q \neq 0$, такова, что $B(q,q) = 0$, то этим свойством обладают и все точки прямой, проведенной через q и 0. Тем самым уравнение $B(q,q) = 0$ задает подмножество в $Q_B \subset \mathbb{P}V$ (проективную квадрику). Как нетрудно видеть, проективная прямая может пересекать квадрику не более чем в двух точках; если точка пересечения одна, то говорят, что прямая касается квадрики.

Теорема 3. *Пусть $p \in \mathbb{P}V$, а $q \in \mathbb{P}V$ такова, что проективная прямая, проведенная через p и q, касается квадрики Q_B. Тогда $q \in \check{p}$.*

Доказательство. Поскольку $Q_B \neq \varnothing$, билинейная форма B не является знакоопределенной; в частности, существует вектор e_0 такой, что $B(e_0, e_0) = -1$. Положим $U \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_0^\perp$. Нетрудно видеть (докажите!), что можно выбрать e_0 так, чтобы $B(u, e_0) \neq 0$ для любого вектора $u \in p$ (то есть $p \notin \mathbb{P}U$).

Отождествим $\mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}U$ с аффинным подпространством $L \stackrel{\mathrm{def}}{=} e_0 + U$, а последнее — с векторным пространством U посредством отображения $\tau : L \to U$, заданного формулой $\tau(r) = r - e_0$. При этом отождествлении билинейная форма B перейдет в форму $\overline{B} = B|_U$, а $\tau(Q_B \cap L) = \{r \in U \mid B(r,r) = 1\}$. Пересечение L с проективной прямой pq перейдет при преобразовании τ в (обычную, не проективную) прямую $\{\overline{p} + vt\}$, где $\overline{p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau(p)$, $v \in U$ — какой-то вектор, а t пробегает все числа. Поскольку B — билинейная форма, имеем $B(\overline{p} + tv) = B(\overline{p}, \overline{p}) + 2B(\overline{p}, v)t + B(v,v)t^2$; поскольку уравнение $B(\overline{p} + tv) = 1$ должно иметь только один корень, его дискриминант равен нулю: $(1 - B(\overline{p}, \overline{p}))B(v,v) = B(\overline{p}, v)^2$. Корень уравнения при этом $t_0 = -B(\overline{p}, v)/B(v,v)$. Отсюда вытекает, что $\overline{q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau(q) = \overline{p} + t_0 v$. Имеем: $B(e_0 + \overline{q}, e_0 + \overline{p}) = B(e_0, e_0) + B(\overline{q}, \overline{p}) = -1 + B(\overline{p}, \overline{p}) + t_0 B(\overline{p}, v) = 0$. Следовательно, равенство $B(u_1, u_2) = 0$ имеет место и для произвольных $u_1 \in q$, $u_2 \in p$. Тем самым $q \in \check{p}$. $\square$

Пример 2. Если $V = \mathbb{R}^3$, $B((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2$, то можно положить $e_0 = (0,0,1)$, и тогда $\tau(Q_B)$ — окружность $\omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Если $p \in \mathbb{R}P^2$ не лежит на бесконечно удаленной прямой, то она изображается точкой плоскости $\mathbb{R}^2$. Если эта точка p лежит вне круга $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, то из p можно провести касательные pq_1 и pq_2 к окружности ω ($q_1, q_2 \in \omega$) — тогда прямая $q_1 q_2$ будет проективно двойственной к точке p. Из равенства $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ вытекает, что прямые, двойственные к точкам p_1 и p_2, пересекаются в точке, двойственной к прямой $p_1 p_2$. Следовательно, если точка p передвигается по прямой, не пересекающей круг Ω, то все соответствующие хорды $q_1 q_2$ пересекаются в одной точке. Заодно это дает способ строить прямую, двойственную к точке p, лежащей внутри Ω: нужно провести две хорды $q_1 q_2$ и $q_3 q_4$, пересекающиеся в p; если теперь p_1 — точка пересечения касательных к ω, проведенных через q_1 и q_2, а p_2 — аналогично, через q_3 и q_4, то прямая $p_1 p_2$ двойственна точке p.