ЛЕКЦИИ 5-6

Краткое содержание. Дробно-линейные преобразования.

Напоминание. Проективным пространством размерности n называется множество $\mathbb{P}V$ одномерных векторных подпространств (т.е. прямых, проходящих через 0) в $n+1$-мерном векторном пространстве V.

Если в пространстве V зафиксирован базис $e_0, \dots, e_n$, то точкам проективного пространства соответствуют наборы однородных координат $[x_0 : \dots : x_n]$, где хотя бы одно из x_i отлично от нуля и два набора $[x_0 : \dots : x_n]$ и $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ ($\lambda \neq 0$) задают одну и ту же точку.

Таким образом определено проективное пространство над любым полем, но мы будем работать с вещественными и комплексными проективными пространствами ($V = \mathbb{R}^{n+1}$ или $V = \mathbb{C}^{n+1}$). Вместо $\mathbb{P}\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n+1}$ пишут обычно $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$. Все теоремы из этой лекции верны как для вещественного, так и для комплексного случая; мы будем использовать обозначение $\mathbb{P}^n$ для $\mathbb{R}P^n$ или $\mathbb{C}P^n$.

Обратимое линейное преобразование $A : V \to V$ переводит прямые, проходящие через нуль, в прямые, проходящие через нуль, и тем самым задает отображение $\overline{A} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$. Такие отображения называются проективными преобразованиями.

Теорема 1. *Проективные преобразования образуют группу. Соответствие $A \mapsto \overline{A}$ является эпиморфизмом из группы $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований пространства V в группу $\mathrm{PGL}(V)$ проективных преобразований пространства $\mathbb{P}V$. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех преобразований вида λI, где λ — константа, а I — единичный оператор.*

Иными словами, $\overline{A} = \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda B$, где $\lambda \neq 0$ — константа.

Доказательство. Из определения следует, что $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{I} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}V}$ и $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$. Это доказывает, что проективные преобразования образуют группу (операция — композиция преобразований), а отображение $A \mapsto \overline{A}$ — эпиморфизм групп. В частности, все проективные преобразования обратимы.

Оператор λI переводит каждый вектор v в вектор λv, лежащий на прямой, проведенной через 0 и v. Поэтому $\overline{\lambda I} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}V}$. Обратно, пусть оператор X переводит каждую прямую, проходящую через 0, в себя. Тогда $Xv = \lambda v$ для каждого $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, и нужно доказать, что λ для всех v одно и то же. Пусть это не так: $Xv_1 = \lambda_1 v_1$, $Xv_2 = \lambda_2 v_2$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда векторы v_1 и v_2 не пропорциональны. С другой стороны $X(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)v_1 = (\lambda_2 - \lambda)v_2$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, среди чисел $\lambda - \lambda_1$ и $\lambda_2 - \lambda$ хотя бы одно отлично от нуля — следовательно, векторы v_1 и v_2 пропорциональны. Противоречие. $\square$

Пример 1. Пусть $n = 1$, так что V двумерно. Прямая ℓ, проведенная через 0 и точку $(x_0, x_1) \in V$, соответствует в $\mathbb{P}^1$ точке с однородными координатами $[x_0 : x_1]$. Если $x_1 \neq 0$ (т.е. ℓ отлична от прямой $\ell_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, 0)\}$, то существует ровно одно x (а именно, $x = x_0/x_1$) такое, что $[x_0 : x_1] = [x : 1]$. (Иными словами, на прямой ℓ имеется единственная точка, вторая координата которой равна 1, то есть ℓ пересекает аффинную прямую $\{(t, 1)\}$ в единственной точке.) Тем самым все точки $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ с $x_1 \neq 0$ взаимно однозначно соответствуют числам t (вещественным или комплексным, в зависимости от смысла $\mathbb{P}^1$). Если $x_1 = 0$, то $x_0 \neq 0$, и $[x_0 : 0] = [1 : 0] \stackrel{\text{def}}{=} \infty$ — иными словами, такая прямая в V существует ровно одна, а именно ℓ_0.

Пусть A — обратимое линейное преобразование с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (тем самым $ad - bc \neq 0$). Тогда проективное преобразование $\overline{A}$ переводит точку $x = [x_0 : x_1]$ в $[ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1] = (ax_0 + bx_1)/(cx_0 + dx_1) = (ax + b)/(cx + d)$ при условии, что $x_1 \neq 0$ и $cx_0 + dx_1 \neq 0 \iff cx + d \neq 0$, т.е. является дробно-линейным. Поскольку $ad - bc \neq 0$, преобразование обратимо (а если $ad - bc = 0$, то являлось бы постоянным). Если $cx + d = 0$, то $\overline{A}([x_0 : x_1]) = \infty = \lim_{x \to -d/c}(ax + b)/(cx + d)$, а если $x = \infty \iff x_1 = 0$, то $\overline{A}([x_0 : x_1]) = [a : c] = a/c = \lim_{x \to \infty}(ax + b)/(cx + d)$. Тем самым проективные преобразования $\mathbb{P}^1$ это дробно-линейные преобразования, продолженные естественным образом в точку $x = \infty$ (и принимающие в одной точке значение ∞).

Предложение 1. *Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ и $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^1$ — две тройки попарно различных точек. Тогда существует единственое проективное преобразование, переводящее p_i в q_i, $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство. Обозначим первую тройку точек p, а вторую q. Пусть сначала $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ и $q_3 = \infty$. Преобразование, переводящее p_1 в 0, а p_3 в ∞, должно иметь вид $x \mapsto \lambda(x - p_1)/(x - p_3)$, где $\lambda =$

$const$. Поскольку p_2 переходит в 1, то λ определяется однозначно: $\lambda = (p_2 - p_3)/(p_2 - p_1)$. Иными словами, преобразование существует и единственно: $f_p(x) = \frac{(p_2-p_3)(x-p_1)}{(p_2-p_1)(x-p_3)}$.

Для произвольных q_1, q_2, q_3 преобразование $f_q^{-1} \circ f_p$ переводит p_i в q_i. С другой стороны, если φ — дробно-линейное преобразование с таким свойством, то $f_q \circ \varphi$ переводит p в тройку $0, 1, \infty$. Тогда $f_q \circ \varphi = f_p$, и $\varphi = f_q^{-1} \circ f_p$. □

Пусть теперь $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{P}^1$ — попарно различные точки. Их двойным отношением называется величина $[x_1, x_2, x_3, x_4] \stackrel{\text{def}}{=} f_{(x_1,x_2,x_3)}(x_4) = \frac{(x_2-x_3)(x_4-x_1)}{(x_2-x_1)(x_4-x_3)} \in \mathbb{P}^1$.

Следствие (предложения 1)**.** $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [y_1, y_2, y_3, y_4]$ *тогда и только тогда, когда существует дробно-линейное преобразование, переводящее* x_i *в* y_i *(*$i = 1, 2, 3, 4$*).*

Доказательство. Пусть $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [y_1, y_2, y_3, y_4] \stackrel{\text{def}}{=} t$. Положим $\varphi_1 \stackrel{\text{def}}{=} f_{(x_1,x_2,x_3)}$ и $\varphi_2 \stackrel{\text{def}}{=} f_{(y_1,y_2,y_3)}$. Тогда $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(y_1) = 0$, $\varphi_1(x_2) = \varphi_2(y_2) = 1$, $\varphi_1(x_3) = \varphi_2(y_3) = \infty$ и $\varphi_1(x_4) = \varphi_2(y_4) = t$. Отсюда вытекает, что преобразование $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ переводит x_i в y_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Обратно, пусть преобразование φ переводит x_i в y_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Рассмотрим преобразование $\psi \stackrel{\text{def}}{=} f_{(y_1,y_2,y_3)} \circ \varphi$. Имеем $\psi(x_1) = 0$, $\psi(x_2) = 1$ и $\psi(x_3) = \infty$, откуда согласно предложению 1 получаем $\psi = f_{(x_1,x_2,x_3)}$. Следовательно, $[x_1, x_2, x_3, x_4] = f_{(x_1,x_2,x_3)}(x_4) = \psi(x_4) = f_{(y_1,y_2,y_3)}(y_4) = [y_1, y_2, y_3, y_4]$. □

Предложение 2. *Обратимое преобразование* $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ *сохраняет двойное отношение четырех точек тогда и только тогда, когда является дробно-линейным.*

Доказательство. Дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение согласно следствию предложения 1. Пусть, наоборот, φ — преобразование, сохраняющее двойное отношение, и пусть $x_1 = \varphi(0)$, $x_2 = \varphi(1)$, $x_3 = \varphi(\infty)$. Рассмотрим преобразование $\psi = f_{(x_1,x_2,x_3)} \circ \varphi$. Тогда ψ сохраняет двойное отношение, и $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$, $\psi(\infty) = \infty$. Имеем $[0, 1, \infty, t] = t$ для любого t, откуда $\psi(x) = [0, 1, \infty, \psi(x)] = [\psi(0), \psi(1), \psi(\infty), \psi(x)] = [0, 1, \infty, x] = x$ для всякого x. Иными словами, $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$, то есть $\varphi = f_{(x_1,x_2,x_3)}^{-1}$ — дробно-линейное преобразование. □