ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Грани выпуклых множеств.

Примеры крайних точек и граней:

Пример 1. Если $X = \mathrm{co}(a_1, \dots, a_N)$ — выпуклый многогранник, то все точки $a \in X$, кроме самих $a_1, \dots, a_N$, являются их выпуклыми комбинациями. Тем самым крайними точками (вершинами) могут быть только точки $a_1, \dots, a_N$ — но не обязательно все.

Пример 2. Крайними точками шара B_R являются все точки граничной сферы Ω_R. Действительно, если $|x| = R$, то рассмотрим линейную функцию $\ell(y) \stackrel{\text{def}}{=} (y, x)$. Как нетрудно видеть, $\ell(x) = R^2$ и $\ell(y) < R^2$ для всех $y \in B_R$, $y \neq x$ — тем самым x является крайней точкой согласно предложениям 3 и 4 лекции 3. Открытый шар $b_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$ вообще не имеет крайних точек (докажите!).

Пример 3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ выпуклую оболочку M точек $a_0 = (0,0,0,0), a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,4,8,16)$, $\dots, a_N = (N, N^2, N^3, N^4)$. Покажем, что у этого многогранника все точки a_k являются вершинами. Для доказательства того, что a_k — вершина, рассмотрим многочлен $P_k(t) = (t-k)^4 \stackrel{\text{def}}{=} t^4 + p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0$ (на самом деле $p_3 = -4k, p_2 = 6k^2, p_1 = -4k^3, p_0 = k^4$, но нам эти формулы не понадобятся). Сопоставим этому многочлену линейную функцию $\ell_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + p_3x_3 + p_2x_2 + p_1x_1$. Тогда, как нетрудно видеть, $\ell_k(a_s) = (s-k)^4 - p_0$, т.е. $\ell_k(a_k) = -p_0$ и $\ell_k(a_s) > -p_0$ при $s \neq k$. Если $x \in M \setminus \{a_k\}$, то $x = \sum_{s=1}^N \lambda_s a_s$, где $\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i \neq k$. Тогда $\ell_k(x) = \sum_{s=1}^N \lambda_s \ell_k(a_s) > -p_0$. Из предложений 3 и 4 лекции 3 вытекает, что a_k — вершина.

Докажем теперь, что вершины a_k и a_l соединены ребром. Для этого рассмотрим многочлен $P_{kl}(t) = (t-k)^2(t-l)^2 \stackrel{\text{def}}{=} t^4 + q_3t^3 + q_2t^2 + q_1t + q_0$ (на самом деле $q_3 = -2(k+l)$ и т.д.) и сопоставим ему линейную функцию $\ell_{kl}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + q_3x_3 + q_2x_2 + q_1x_1$. Нетрудно видеть, что $\ell_{kl}(a_s) = (s-k)^2(s-l)^2 - q_0$, откуда следует, что $\ell_{kl}(a_k) = \ell_{kl}(a_l) = -q_0$, и $\ell_{kl}(a_s) > -q_0$ при $s \neq k, l$. Отсюда очевидно выводится, что $\ell_{kl}(x) = -q_0$ во всех точках $x \in [a_k, a_l]$. Далее аналогично: если $x \in M \setminus [a_k, a_l]$, это означает, что $x = \sum_{s=1}^N \lambda_s a_s$, где $\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i \neq k, l$. Отсюда $\ell_{kl}(x) = \sum_{s=1}^N \lambda_s \ell_{kl}(a_s) > -q_0$. Из предложения 4 лекции 3 вытекает, что $[a_k, a_l]$ является ребром M.

Тем самым построен пример четырехмерного многогранника с произвольным количеством N вершин, каждые две из которых соединены ребром. Трехмерный многогранник с таким свойством обязательно является тетраэдром и имеет 4 вершины.

Несколько простых фактов о гранях.

Предложение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество, и $F = X \cap L$ — его грань (здесь $L \subset \mathbb{R}^n$ — аффинное подпространство). Пусть $v \in F$ — внутренняя точка отрезка $[u_1, u_2] \subset X$. Тогда $u_1, u_2 \in F$ (и, следовательно, весь отрезок лежит в F).*

Доказательство. Если $u_1 \in F$ и $v \in F$, то вся прямая, проведенная через u_1 и v, лежит в L (поскольку L — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$). Следовательно, $u_2 \in F$, и в этом случае предложение доказано. Если же $u_1 \notin F$ и $u_2 \notin F$, то получается противоречие с выпуклостью $X \setminus F$. $\square$

Следствие. *Пересечение двух граней выпуклого множества — пустое множество или грань.*

Доказательство — упражнение.

Если грани F_1 и F_2 удовлетворяют условиям предложения 4 лекции 3, и ℓ_1, ℓ_2 — соответствующие линейные функции, а q_1, q_2 — соответствующие константы, то линейная функция $\ell = \ell_1 + \ell_2$ удовлетворяет неравенству $\ell(x) \leq q_1 + q_2$ при всех $x \in X$, причем равенство имеет место только при $F_1 \cap F_2$; таким образом, грань $F_1 \cap F_2$ тоже удовлетворяет условиям предложения 4.

Всякая ли грань удовлетворяет условиям предложения 4? В принципе, ответ отрицательный (см. ниже пример 5), но некоторая частичная теорема все же имеет место. Сначала введем важное вспомогательное понятие.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — *замкнутое* выпуклое множество, и $0 \in X$. Для произвольной точки $v \in \mathbb{R}^n$ пересечение $X_v \stackrel{\text{def}}{=} X \cap \{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$ множества X с лучом, проведенным через v и начало координат — выпуклое замкнутое подмножество этого луча, содержащее 0. Такое подмножество обязательно есть точка 0, отрезок с концом в 0 или весь луч (докажите!). Положим по определению $p_X(v) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 \mid v/t \in X\}$; возможны значения $p_X(v) = 0$ (если X_v — весь луч $\{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$) и $p_X(v) = +\infty$ (если X_v — точка).

Предложение 2. *Функция p_X обладает следующими свойствами:*

1) положительная однородность: $p_X(\lambda v) = \lambda p_X(v)$ для всякого $v \in \mathbb{R}^n$ и всякого $\lambda > 0$.

2) субаддитивность: $p_X(v_1 + v_2) \leq p_X(v_1) + p_X(v_2)$.

Доказательство. Положительная однородность: если $u = \lambda v$ и $\lambda > 0$, то $X_u = X_v$. Отсюда вытекает, что $p_X(u) = \inf\{t > 0 \mid u/t \in X\} = \inf\{t > 0 \mid \lambda v/t \in X\} = \lambda \inf\{t > 0 \mid v/t \in X\} = \lambda p_X(v)$.

Субаддитивность. Пусть $\lambda > 0$ — произвольное число, для которого $\lambda \geq p_X(v_1) + p_X(v_2)$. Тогда существуют числа $\lambda_1 \geq p_X(v_1)$ и $\lambda_2 \geq p_X(v_2)$ такие, что $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Поскольку $\lambda_1 \geq p_X(v_1)$, имеет место включение $v_1/\lambda_1 \in X$; аналогично, $v_2/\lambda_2 \in X$. Поскольку X — выпуклое множество, выпуклая комбинация $v = \frac{\lambda_1}{\lambda}(v_1/\lambda_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda}(v_2/\lambda_2) = (v_1 + v_2)/\lambda$ также лежит в X. Отсюда вытекает, что $\lambda \geq p_X(v_1 + v_2)$. Тем самым доказано, что всякое число $\lambda > 0$, не превосходящее $p_X(v_1) + p_X(v_2)$, не превосходит также и $p_X(v_1 + v_2)$ — следовательно, $p_X(v_1 + v_2) \leq p_X(v_1) + p_X(v_2)$. $\square$

p_X называется функцией Минковского выпуклого множества X.

Пример 4. Если $X = \{x \mid |x| \leq 1\}$ (единичный шар с центром в начале координат), то $p_X(v) = |v|$. Если $X = \{x \mid |x_1| \leq 1, \dots, |x_n| \leq 1\}$ (куб с центром в начале координат и ребрами длиной 2, параллельными координатным осям), то $p_X(v) = \max(|v_1|, \dots, |v_n|)$.

Теорема 1 (Хана–Банаха)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество, для которого $0 \in X$, и $F = X \cap L$ — его грань; здесь $L \subset \mathbb{R}^n$ — аффинное подпространство, не содержащее 0. Тогда существует линейная функция $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\ell(v) \leq 1$ для всех $v \in X$, причем при $v \in F$ имеет место равенство.*

Доказательство. Обозначим V_0 векторное подпространство, порожденное L (т.е. проведенное через L и начало координат).

Пусть сначала ℓ — искомая линейная функция. Тогда $p_X(v/p_X(v)) = 1$, то есть $v/p_X(v) \in X$ в силу замкнутости X. Отсюда $\ell(v/p_X(v)) \leq 1$, то есть $\ell(v) \leq p_X(v)$ для всякого $v \in \mathbb{R}^n$. Обратно, если $\ell(v) \leq p_X(v)$, то при $v \in X$ получаем $\ell(v) \leq p_X(v) \leq 1$.

Тем самым утверждение теоремы эквивалентно следующему: существует линейная функция ℓ такая, что $\ell(v) \leq p_X(v)$ для всех $v \in \mathbb{R}^n$, причем равенство имеет место только при $v \in V_0$.

Определим сначала функцию ℓ на подпространстве V_0. Пусть $W \subset V_0$ — векторное подпространство, параллельное L. Зафиксируем вектор $y \in V_0$, перпендикулярный W; поскольку $\dim W = \dim V - 1$, такой вектор определен однозначно с точностью до пропорциональности; положим $\ell(v) = (y, v)$. Если $v_1, v_2 \in L$, то $v_1 - v_2 \in W$, откуда $\ell(v_1 - v_2) = (y, v_1 - v_2) = 0$, то есть $\ell(v_1) = \ell(v_2)$ — функция ℓ постоянна на подпространстве L. Умножая y на соответствующий множитель, можно добиться равенства $\ell(v) = 1$ для всех $v \in L$. Поскольку множество $\{x \in V_0 \mid \ell(x) = 1\}$ — аффинное подпространство в V_0 коразмерности 1, а L является таким подпространством, получаем $\{x \in V_0 \mid \ell(x) = 1\} = L$.

Пусть теперь существует вектор $v \in V_0$, для которого $\ell(v) > 1$. Поскольку $0 \in X \cap V_0$, и $X \cap V_0$ выпукло, отрезок $[0, v]$ целиком лежит в $X \cap V_0$. В частности, в $X \cap V_0$ лежит точка $w \stackrel{\text{def}}{=} v/\ell(v)$. Но $\ell(w) = \ell(v)/\ell(v) = 1$, то есть $w \in F = X \cap L$. Это противоречит выпуклости множества $X \setminus F$. Следовательно, неравенство $\ell(v) \leq 1$ имеет место на V_0 — на V_0 искомая функция построена.

Пусть теперь ℓ определена на некотором подпространстве V, и $u \notin V$. Докажем, что ℓ можно продолжить (с сохранием тех свойств, которые упоминаются в теореме) на большее подпространство $U = V \oplus \langle u \rangle$. Тогда, очевидно, теорема будет доказана по индукции. Для продолжения положим $\ell(u) \stackrel{\text{def}}{=} c$ и докажем, что значение c можно подобрать так, чтобы утверждение теоремы выполнялось. Произвольный вектор из $w \in U$ однозначно представляется в виде $w = \lambda(u + v)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Если $\lambda > 0$, то неравенство $\ell(w) \leq p_X(w)$ эквивалентно $\ell(\lambda(u + v)) = \lambda(c + \ell(v)) \leq p_X(\lambda(u + v)) = \lambda p_X(u + v)$, то есть для произвольного $v \in V$ должно выполняться неравенство $c \leq p_X(u + v) - \ell(v)$. Если $\lambda < 0$, то $\ell(w) \leq p_X(w)$ эквивалентно $\ell(\lambda(u + v)) = \lambda(c + \ell(v)) \leq p_X(\lambda(u + v)) = -\lambda p_X(-u - v)$, то есть $c \geq -\ell(v) - p_X(-u - v)$. Чтобы эта система неравенств для c была совместна, нужно доказать, что $-\ell(v_1) - p_X(-u - v_1) \leq -\ell(v_2) + p_X(u + v_2) \iff \ell(v_2 - v_1) \leq p_X(u + v_2) + p_X(-u - v_1)$ для всяких $v_1, v_2 \in V$. Но поскольку на V утверждение теоремы выполнено, имеем $\ell(v_2 - v_1) \leq p_X(v_2 - v_1) \leq p_X(u + v_2) + p_X(-u - v_1)$ в силу субаддитивности p_X. $\square$

Пример 5. Не всегда можно подобрать линейную функцию так, чтобы равенство $\ell(v) = 1$ выполнялось *только* для точек грани F. В качестве примера можно рассмотреть множество $X \subset \mathbb{R}^2$, полученное объединением прямоугольника $ABCD$ и полукруга, построенного на стороне AB как на диаметре. Вершины прямоугольника являются в этом множестве крайними точками, т.е. нульмерными гранями. В то же время линейная функция, равная 1 в точке A и не превосходящая 1 на всем X неизбежно равна 1 на всем отрезке AD (докажите!).