ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Выпуклые множества.

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух точек $a, b \in X$ весь отрезок $[a,b] \stackrel{\text{def}}{=} \{ta + (1-t)b \mid 0\}$ лежит в X.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$, разумеется, выпукло. Более интересный пример — полупространство: пусть $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция, а $q \in \mathbb{R}$ — число. Тогда множество $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) < q\}$ выпукло. Действительно, если $a, b \in \Pi$, то $\ell(ta + (1-t)b) = t\ell(a) + (1-t)\ell(b)$ (поскольку ℓ линейна) $< tq + (1-t)q = q$ (поскольку $t \ge 0$ и $1 - t \ge 0$).

Предложение 1. *Пересечение любого семейства (конечного или бесконечного) выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство очевидно. Предложение 1 позволяет строить многочисленные примеры выпуклых множеств.

Пример 2. Интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ выпуклый, поскольку является пересечением полупространств (лучей) $\{x \mid x < b\}$ и $\{x \mid -x < -a\}$.

Пример 3. Замкнутое полупространство $\Pi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) \le q\}$ выпукло, поскольку является пересечением всех открытых полупространств $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) < q + \varepsilon\}$, где ε — произвольное положительное число.

Пример 4. Из примера 3 вытекает, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ выпуклый (доказательство — как в примере 2). Также выпукла произвольная аффинная гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) = q\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) \le q\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\ell(x) \le -q\}$. Поскольку каждое аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является пересечением аффинных гиперплоскостей (иными словами, задается системой линейных неоднородных уравнений), то оно тоже выпукло.

Пример 5. Докажем, что шар $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le R\}$ — выпуклое множество. Пусть сначала $x \in B_R$, а $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор единичной длины: $|y| = 1$. Тогда $(x, y) \le |x|\,|y| \le R$, то есть x лежит в полупространстве $\Pi_y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \le R\}$. Тем самым $B_R \subset \Pi_y$ для всякого y такого, что $|y| = 1$, то есть $B_R \subseteq \bigcap_{|y|=1} \Pi_y$. С другой стороны, пусть x принадлежит пересечению полупространств $\bigcap_{|y|=1} \Pi_y$. Тогда, в частности, он лежит в полупространстве $\Pi_{x/R}$ (поскольку $|x/R| = R/R = 1$). Тогда $(x, x) = R(x, x/R) \le R^2$, откуда $|x| \le R$, то есть $x \in B_R$. Таким образом, доказано, что $\bigcap_{|y|=1} \Pi_y \subseteq B_R$. Иными словами, $B_R = \bigcap_{|y|=1} \Pi_y$ и, следовательно, является выпуклым множеством.

Предложение 2. *Пусть X — выпуклое множество, $a_1, \dots, a_N \in X$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_N \ge 0$ — действительные числа, для которых $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1$. Тогда точка $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_N a_N \in X$.*

Доказательство. Индукция по N. База $N = 2$ — определение выпуклого множества (здесь $t = \lambda_1, 1-t = \lambda_2$). Пусть для некоторого N теорема верна, и имеется $N + 1$ точка $a_1, \dots, a_{N+1}$. Если $\lambda_{N+1} = 1$, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0$, и утверждение тривиально. Если $\lambda_{N+1} < 1$, то положим $\mu_1 = \lambda_1/(1-\lambda_{N+1}), \dots, \mu_N = \lambda_N/(1-\lambda_{N+1})$. Очевидно, $\mu_1, \dots, \mu_N \ge 0$ и $\mu_1 + \dots + \mu_N = (\lambda_1 + \dots + \lambda_N)/(1-\lambda_{N+1}) = 1$. Тогда $a \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1 a_1 + \dots + \mu_N a_N \in X$ по предположению индукции. Отсюда, по определению выпуклого множества, X содержит точку $\lambda_{N+1} a_{N+1} + (1 - \lambda_{N+1})a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_N a_N + \lambda_{N+1} a_{N+1}$. $\square$

Точка $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_N a_N$ называется выпуклой комбинацией точек $a_1, \dots, a_N$. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Выпуклой оболочкой Y называется множество $\operatorname{co} Y$, состоящее из всех выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек $a_1, \dots, a_N \in Y$.

Теорема 1. *Множество $\operatorname{co} Y \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и является пересечением всех выпуклых множеств $X \subseteq \mathbb{R}^n$ таких, что $Y \subseteq X$.*

Доказательство. Выпуклость $\operatorname{co} Y$: пусть a — выпуклая комбинация точек $a_1, \dots, a_{N_1} \in Y$, а b — выпуклая комбинация точек $b_1, \dots, b_{N_2} \in Y$. К любой выпуклой комбинации можно добавить "лишние" точки с нулевыми коэффициентами перед ними, так что без ограничения общности можно считать, что $a = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$ и $b = \sum_{k=1}^N \mu_k a_k$. Тогда для всякого $0 \le t \le 1$ имеем $ta + (1-t)b = \sum_{k=1}^N (t\lambda_k + (1-t)\mu_k) a_k$. Положим $\nu_k = t\lambda_k + (1-t)\mu_k$; очевидно, $\nu_k \ge 0$ для любого k и $\sum_{k=1}^N \nu_k = t \sum_{k=1}^N \lambda_k + (1-t) \sum_{k=1}^N \mu_k = t + (1-t) = 1$.

Тем самым точка $ta + (1-t)b$ также является выпуклой комбинацией точек $a_1, \ldots, a_N$ и, тем самым, принадлежит $\operatorname{co} Y$. Выпуклость доказана.

Пусть теперь $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, для которого $Y \subseteq X$. Тогда если $a_1, \ldots, a_N \in Y$, то $a_1, \ldots, a_N \in X$ и, согласно предложению 2, любая выпуклая комбинация точек $a_1, \ldots, a_N$ принадлежит X. Отсюда $\operatorname{co} Y \subseteq X$, то есть $\operatorname{co} Y$ — подмножество пересечения всех выпуклых множеств X таких, что $Y \subseteq X$. С другой стороны, одно из таких множеств — само $\operatorname{co} Y$: выпуклость его только что доказана и, очевидно, $Y \subseteq \operatorname{co} Y$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{co} Y$ совпадает с указанным пересечением. □

Выпуклая оболочка конечного числа точек в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклым многогранником.

Точка $a \in X$ выпуклого множества X называется крайней, если она не является выпуклой комбинацией никаких других точек X.

Пересечение $F = X \cap L$ выпуклого множества X и аффинного подпространства L выпукло согласно примеру 4 и предложению 1. F называется гранью X, если дополнение $X \setminus F$ также выпукло. Если грань является отрезком, то она называется ребром.

Предложение 3. *Точка $a \in X$ является гранью тогда и только тогда, когда она является крайней точкой.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ — крайняя, $b, c \in X \setminus \{a\}$ и $0 \le t \le 1$. Тогда точка $tb + (1-t)c \in X$, но равенство $tb + (1-t)c = a$ невозможно, поскольку точка a не является выпуклой комбинацией других точек X. Следовательно, $tb + (1-t)c \in X \setminus \{a\}$, и $X \setminus \{a\}$ выпукло.

Обратно, пусть $\{a\}$ — грань, т.е. $X \setminus \{a\}$ выпукло. Тогда a не является точкой отрезка с концами $a_1, a_2 \neq a$, т.е. не является выпуклой комбинацией таких точек a_1, a_2. Пусть по индукуции доказано, что a не является выпуклой комбинацией никаких N точек $a_1, \ldots, a_N \neq a$, но тем не менее $a = \sum_{k=1}^{N+1} \lambda_k a_k$, где $a_1, \ldots, a_{N+1} \neq a$. Тогда $\lambda_{N+1} \neq 1$ и $a = \lambda_{N+1} a_{N+1} + (1 - \lambda_{N+1}) b$, где $b = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k / (1 - \lambda_{N+1})$. Согласно предположению индукции, $b \neq a$ и $a_{N+1} \neq a$. Но тогда равенство $a = \lambda_{N+1} a_{N+1} + (1 - \lambda_{N+1}) b$ противоречит выпулости $X \setminus \{a\}$. □

Предложение 4. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, а $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция. Допустим, что существует число q такое, что $\ell(a) \le q$ для всех $a \in X$. Тогда множество $F \stackrel{def}{=} \{a \in X \mid \ell(x) = q\}$, если оно непусто, является гранью X.*

Доказательство. $X \setminus F = \{x \in X \mid \ell(x) < q\} = X \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ell(x) < q\}$ — выпукло согласно примеру 1 и предложению 1. □