# ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Группа аффинных преобразований.

**Теорема 1.** *Пусть $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ и $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ — два набора точек, не лежащих ни в каком собственном аффинном подпространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда существует и единственно аффинное преобразование $F$, переводящее каждую точку $u_i$ в соответствующее $v_i$.*

*Пример* 1. Собственные аффинные подпространства $\mathbb{R}^1$ имеют размерность 0, т.е. являются точками. Условие, что точки $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^1$ не лежат в собственном подпространстве, означает просто что они различны. Тем самым получается такое утверждение: для двух пар чисел $u_0 \neq u_1$ и $v_0 \neq v_1$ существуют и единственны числа $a \neq 0$ и $b$ такие, что $au_0 + b = v_0$, $av_1 + b = v_1$.

*Пример* 2. Собственные аффинные подпространства $\mathbb{R}^2$ это точки и прямые. Условие, что точки $u_0, u_1, u_2$ не лежат в собственном аффинном подпространстве, означает, что они не лежат на одной прямой. Тем самым получается утверждение, что для любых двух треугольников с нумерованными вершинами существует и единственно аффинное преобразование, переводящее вершины первого в соответствующие вершины второго.

*Доказательство теоремы 1.* Точки $u_0, u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ лежат в аффинном подпространстве, проходящем через точку $u_0$ и параллельном векторному пространству, порожденному векторами $u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0$. Поскольку это пространство, по условию теоремы, не может быть собственным, оно имеет размерность $n$, откуда вытекает, что векторы $u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0$ линейно независимы и образуют в $\mathbb{R}^n$ базис. Определим линейный оператор $A$ так, чтобы он каждый базисный вектор $u_i - u_0$ переводил в вектор $v_i - v_0$. Поскольку векторы $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ сами образуют базис, то оператор $A$ обратим. Еще положим $b = v_0 - Au_0$. Тогда для преобразования $F(u) = Au + b$ имеем $F(u_0) = Au_0 + b = v_0$, а при $i = 1, \dots, n$ тоже $F(u_i) = Au_i + b = Au_0 + b + A(u_i - u_0) = v_0 + b + (v_i - v_0) = v_i$. Существование доказано.

Единственность: если $F(u) = Au + b$ и $F(u_i) = v_i$ при $i = 0, \dots, n$, то $A(u_i - u_0) = F(u_i) - F(u_0) = v_i - v_0$. Поскольку $u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0$ — базис, эти равенства определяют оператор $A$ однозначно. Также $v_0 = F(u_0) = Au_0 + b$, откуда $b = v_0 - Au_0$ также определен однозначно. □

**Теорема 2.** *Аффинные преобразования $\mathbb{R}^n$ образуют группу $\mathrm{Aff}(n)$. Аффинные преобразования, сохраняющие заданную точку $q \in \mathbb{R}^n$, образуют подгруппу $\mathrm{Stab}_q \subset \mathrm{Aff}(n)$, изоморфную группе $\mathrm{GL}(n)$ линейных обратимых преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Подгруппы $\mathrm{Stab}_q$ при разных $q$ сопряжены друг другу: $\mathrm{Stab}_p = \tau^{-1} \mathrm{Stab}_q \tau$, где $\tau \in \mathrm{Aff}(n)$ — произвольное преобразование, переводящее $p$ в $q$. Параллельные переносы образуют нормальную подгруппу $T \subset \mathrm{Aff}(n)$. Фактор-группа $\mathrm{Aff}(n)/T$ также изоморфна $\mathrm{GL}(n)$.*

*Доказательство.* Первое утверждение: действительно, композиция двх аффинных преобразований $F_1(u) = A_1 u + b_1$ и $F_2(v) = A_2 v + b_2$ равна $(F_1 \circ F_2)(v) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = A_1 A_2 v + (A_1 b_2 + b_1)$ — аффинное преобразование. Обратное преобразование к $F(u) = Au + b$ также аффинно: $F^{-1}(v) = A^{-1}v - A^{-1}b$.

Композиция двух преобразований $F_1, F_2 \in \mathrm{Stab}_q$, очевидно, переводит точку $q$ в себя, и тем самым тоже принадлежит $\mathrm{Stab}_q$. Преобразование, обратное к $F \in \mathrm{Stab}_q$, также переводит $q$ в себя и лежит в $\mathrm{Stab}_q$. Следовательно, $\mathrm{Stab}_q \subset \mathrm{Aff}(n)$ — подгруппа. Рассмотрим теперь произвольное преобразование $\tau \in \mathrm{Aff}(n)$, для которого $\tau(p) = q$ (оно существует: это вытекает из теоремы 1, или можно взять параллельный перенос на вектор $q - p$). Тогда для всякого $F \in \mathrm{Stab}_q$ имеем $\tau^{-1}F\tau(p) = \tau^{-1}F(q) = \tau^{-1}(q) = p$, и тем самым $\tau^{-1}F\tau \in \mathrm{Stab}_p$. Тем самым преобразование сопряжения, сопоставляющее каждому элементу $F \in \mathrm{Stab}_q$ элемент $\tau^{-1}F\tau$, переводит $\mathrm{Stab}_q$ в $\mathrm{Stab}_p$. Это преобразование обратимо — обратным служит преобразование сопряжения посредством $\tau^{-1}$, сопоставляющее $G \mapsto \tau G \tau^{-1}$. Тем самым построено биективное соответствие между подгруппами $\mathrm{Stab}_q$ и $\mathrm{Stab}_p$. Это соответствие — гомоморфизм групп, т.к. переводит произведение в произведение: $\tau^{-1}FG\tau = \tau^{-1}F\tau\tau^{-1}G\tau$. Тем самым доказано, что группы $\mathrm{Stab}_q$ и $\mathrm{Stab}_p$ изоморфны.

Очевидно, что $\mathrm{Stab}_0$ состоит из преобразований вида $F(v) = Av + b$, у которых $b = 0$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Stab}_0$ изоморфна группе линейных преобразований $\mathrm{GL}(n)$ — а следовательно, и все группы $\mathrm{Stab}_q$ ей изоморфны.

Композиция параллельных переносов на векторы $b_1$ и $b_2$ — параллельный перенос на вектор $b_1 + b_2$; преобразование, обратное к переносу на вектор $b$ — перенос на вектор $-b$. Тем самым параллельный переносы образуют в $\mathrm{Aff}(n)$ подгруппу, изоморфную группе $\mathbb{R}^n$ (по сложению).

Теперь нужно доказать, что $T$ — нормальная подгруппа, фактор по которой изоморфен $\mathrm{GL}(n)$. Приведем два доказательства. Первое: пусть $\tau_b$ — параллельный перенос ($\tau_b(u) = u + b$), а $F \in \mathrm{Aff}(n)$ — произвольное преобразование ($F(u) = Au+q$). Тогда обратное преобразование задается формулой $F^{-1}(u) = A^{-1}u - A^{-1}b$, и $F^{-1}\tau_b F(u) = F^{-1}\tau_b(Au+q) = F^{-1}(Au+q+b) = A^{-1}(Au+q+b) - A^{-1}b = u + A^{-1}q$ — параллельный перенос. Следовательно, подгруппа $T \subset \mathrm{Aff}(n)$ нормальна. Для вычисления фактора зафкисируем точку $q \in \mathbb{R}^n$ и заметим, что для всякого $F \in \mathrm{Aff}(n)$ существуют и единственны $G \in \mathrm{Stab}_q$ и $\tau \in T$ такие, что $F = \tau \circ G$ — а именно, нужно взять $\tau = \tau_{F(q)-q}$ и $G = \tau^{-1}F$ (проверьте!). Тем самым группа $\mathrm{Aff}(n)$ это объединение смежных классов (правых) вида $TG$, где $G$ пробегает все элементы подгруппы $\mathrm{Stab}_q$, изоморфной $\mathrm{GL}(n)$. Для умножения смежных классов нужно взять их представителей, перемножить и посмотреть, какому классу принадлежит произведение. Если брать в каждом классе его единственный представитель, лежащий в $\mathrm{Stab}_q$, то получится доказательство того, что фактор-группа изоморфна $\mathrm{Stab}_q$, т.е. $\mathrm{GL}(n)$.

Второе доказательство: определим отображение $r : \mathrm{Aff}(n) \to \mathrm{GL}(n)$ формулой $r(F) = A$, где $F(u) = Au+b$. Нетрудно проверить, что это — гомоморфизм групп (см. выписанные выше формулы для композиции аффинных преобразований и для обратного аффинного преобразования), что образом его является вся группа $\mathrm{GL}(n)$, а ядром — подгруппа параллельных переносов $T$. Следовательно, нужный результат ($T$ нормальна и фактор изоморфен $\mathrm{GL}(n)$) вытекает из теоремы о гомоморфизме из теории групп.

Кстати, гомоморфизм $r$ имеет геометрический смысл: нетрудно заметить, что если $p - q = r - s$, то $F(p) - F(q) = A(p-q) = A(r-s) = F(r) - F(s)$. Тем самым можно по каждому аффинному преобразованию $F$ построить отображение $r(F) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: для произвольного $v \in \mathbb{R}^n$ подобрать две точки $p$ и $q$ такие, что $p - q = v$, и положить по определению $r(F)(v) = F(p) - F(q)$. Согласно замечанию выше, результат не зависит от выбора точек $p$ и $q$, и $r(F)(v) = Av$ — линейное отображение. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — аффинное подпространство размерности $n$ (аффинная гиперплоскость), не проходящее через начало координат. Тогда множество всех линейных преобразований $B \in \mathrm{GL}(n+1)$, переводящих гиперплоскость $L$ в себя, образует в $\mathrm{GL}(n+1)$ подгруппу, изоморфную $\mathrm{Aff}(n)$.*

*Доказательство.* Гиперплоскость $L$ имеет вид $\{v + q \mid v \in V\}$, где $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — векторное подпространство размерности $n$, а $q$ — вектор, не лежащий в $V$ (потому что если $q \in V$, то и $-q \in V$, и $0 = (-q) + q \in L$ вопреки условию теоремы). Выберем в $V$ какой-либо базис $v_1, \dots, v_n$; поскольку $q \notin V$, векторы $v_1, \dots, v_n, q$ образуют базис в $\mathbb{R}^{n+1}$ (докажите!).

Пусть $v \in V$, тогда $v+q \in L$. Если $B \in \mathrm{GL}(n+1)$ переводит подпространство $L$ в себя, то $Bv = B(v+q) - Bq$ представляет собой разность двух векторов, лежащих в $L$ и, следовательно, принадлежит $V$. Тем самым $B$ переводит $V$ в себя.

Обозначим $d : L \to \mathbb{R}^n$ отображение, переводящее вектор $v + q = x_1v_1 + \dots + x_nv_n + q$ в $(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку $v_1, \dots, v_n, q$ — базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, это оттображение взаимно однозначно. Пусть теперь $B \in \mathrm{GL}(n+1)$ переводит подпространство $L$ в себя; сопоставим $B$ отображние $F = dBd^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Отображение $F$ является аффинным преобразованием. Действительно, пусть $a = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $F(a) = d(B(x_1v_1 + \dots + x_nv_n + q)) = d(x_1B(v_1) + \dots + x_nB(v_n) + B(q) - q + q)$. Как уже доказано, $B(v_1), \dots, B(v_n) \in V$; кроме того, $B(q) \in L$ и $q \in L$ — следовательно, $B(q) - q \in V$. Разложим все эти векторы по базису $v_1, \dots, v_n \in V$: $B(v_i) = \beta_{i1}v_1 + \dots + \beta_{in}v_n$, и $B(q) - q = \gamma_1v_1 + \dots + \gamma_nv_n$. Отсюда вытекает, что $F(a) = (x_1\beta_{11} + \dots + x_n\beta_{n1} + \gamma_1, \dots, x_1\beta_{1n} + \dots + x_n\beta_{nn} + \gamma_n)$ — аффинное преобразование.

Множество $\mathrm{Norm}_L$ линейных операторов, переводящих $L$ в себя, является, очевидно, подгруппой в $\mathrm{GL}(n+1)$. Соответствие $B \mapsto F$ переводит композицию в композицию ($dF_1F_2d^{-1} = dF_1d^{-1}dF_2d^{-1}$) и, следовательно, является гомоморфизмом групп $\mathrm{Norm}_L \to \mathrm{Aff}(n)$. Докажем сначала, что ядро этого гомоморфизма тривиально. Действительно, если $dBd^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$, то $B|_L = d^{-1}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{Id}_L$ — оператор $B$ переводит каждый вектор $v + q \in L$ в себя. В частности, $B(q) = q$, откуда $B(v_i) = B(v_i + q) - B(q) = v_i + q - q = v_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тем самым линейный оператор $B$ переводит каждый вектор базиса $v_1, \dots, v_n, q$ в себя и, следовательно, является единичным.

Теперь проверим, что образом гомоморфизма является вся группа $\mathrm{Aff}(n)$ (так что это изоморфизм). Пусть $F \in \mathrm{Aff}(n)$ имеет вид $F(a) = Aa+b$, где $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$ — обратимая матрица $n \times n$, а $b = (b_1, \dots, b_n)$ — вектор в $\mathbb{R}^n$. Тогда $d^{-1}Fd : L \to L$ задается равенством $(d^{-1}Fd)(x_1v_1 + \dots + x_nv_n + q) = \sum_{i,j=1}^n x_i(\alpha_{ij}v_j + b_i) + q = (x_1\alpha_{11} + \dots + x_n\alpha_{n1})v_1 + \dots + (x_1\alpha_{1n} + \dots + x_n\alpha_{nn})v_n + q$. Очевидно, $d^{-1}Fd$ является ограничением на $L$ линейного оператора $B$, заданного в базисе $v_1, \dots, v_n, q$ равенством $B(x_1v_1 + \dots + x_nv_n + yq) = (x_1\alpha_{11} + \dots + x_n\alpha_{n1})v_1 + \dots + (x_1\alpha_{1n} + \dots + x_n\alpha_{nn})v_n + yq$. $\square$