ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Аффинные преобразования $\mathbb{R}^n$.

Аффинным преобразованием называется отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное равенством $F(v) = Av + b$, где $b \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, а $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимый линейный оператор. В стандартных координатах аффинное преобразование выглядит так: $F(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n)$; здесь $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора v, $b_1, \dots, b_n$ — координаты вектора b, а $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица оператора A; обратимость эквивалентна тому, что определитель этой матрицы отличен от нуля.

Пример 1. Аффинное преобразование $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — линейная неоднородная функция $F(x) = ax + b$, где $a \neq 0$.

Пример 2. Параллельный перенос $F(v) = v + b$ — аффинное преобразование; здесь оператор A — единичный (тождественный).

Пример 3. Любое движение является аффинным преобразованием. Действительно, пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — движение, и $b = F(0)$. Обозначим $G(v) = F(v) - b$ (так что $G(0) = 0$) и докажем, что G — линейное преобразование. Пусть $q, r \in \mathbb{R}^n$, а точка p лежит на отрезке с концами q и r. Тогда $\varrho(p, q) + \varrho(p, r) = \varrho(q, r)$. Если $G(p) = p'$, $G(q) = q'$ и $G(r) = r'$, то $\varrho(p', q') + \varrho(p', r') = \varrho(q', r')$, откуда следует, что точка p' лежит на отрезке $q'r'$. Следовательно, преобразование G переводит отрезки в отрезки, а прямые — в прямые.

Пусть теперь p и q лежат на прямой, проходящей через 0, и $q = \lambda p$ (как векторы; мы не будем различать в обозначениях точку и ее радиус-вектор). Предположим для определенности, что $\lambda > 0$ (случай $\lambda < 0$ разбирается аналогично). Тогда p' и q' лежат на прямой, проходящей через $0 = G(0)$, причем 0 не лежит на отрезке $p'q'$, и $|q'| = |q| = |\lambda|\,|p| = |\lambda|\,|p'|$. Отсюда $q' = \lambda p'$. Тем самым, G обладает свойством однородности: $G(\lambda p) = \lambda G(p)$.

Пусть теперь p, q, r таковы, что $r = p + q$. Тогда прямая, проведенная через qr, параллельна прямой $0p$, прямая pr — прямой $0q$, а прямые $0r$ и pq пересекаются. Поскольку G обратимо и переводит прямые в прямые, то пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся. Отсюда вытекает, что прямые $0r'$ и $p'q'$ пересекаются и, следовательно, точки $0, p', q', r'$ лежат в одной плоскости. Прямые $0p'$ и $q'r'$ лежат в этой плоскости и не пересекаются (почему?) — следовательно, они параллельны. То же самое верно для прямых $0q'$ и $p'r'$. Следовательно, $0p'r'q'$ — параллелограмм, и $r' = p' + q'$. Следовательно, G обладает свойством аддитивности: $G(p + q) = G(p) + G(q)$. Линейность G, а вместе с нею и аффинность F, доказана.

Как нетрудно заметить, аффинное преобразование обратимо, причем обратное тоже аффинно. Действительно, если $u = Av + b$, то $v = A^{-1}u - A^{-1}b$.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — векторное подпространство. Аффинным подпространством, параллельным V, называется подмножество $L \subset \mathbb{R}^n$ вида $\{v + q \mid v \in V\}$, где $q \in \mathbb{R}^n$ — какой-нибудь фиксированный вектор. Размерностью L называется размерность V. Обязательно $q \in L$, но не обязательно $0 \in L$, так что L может не быть векторным подпространством. Аффинные подпространства, параллельные одному и тому же векторному подпространству V, называются параллельными. Нетрудно видеть (докажите!), что параллельные пространства либо не пересекаются, либо совпадают.

Пример 4. Аффинные подпространства размерности 0 это точки $\mathbb{R}^n$, а размерности 1 — прямые в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно проходящие через начало координат).

Теорема 1. *Аффинное преобразование переводит всякое аффинное подпространство в аффинное подпространство той же размерности. Параллельные подпространства переходят в параллельные. Аффинное преобразование переводит отрезок в отрезок и сохраняет отношение длин параллельных отрезков.*

Доказательство. Пусть $L = \{v + q \mid q \in V\}$, а $F(v) = Av + b$. Тогда $F(v + q) = Av + Aq + b \in L' \stackrel{\text{def}}{=} \{Aq + b + w \mid w \in AV\}$; т.е. $F(L) \subseteq L'$, где L' — аффинное подпространство, параллельное векторному подпространству AV (образу подпространства V под действием оператора A). Обратно, если $w \in AV$, то $w = Av$ для однозначно определенного (в силу обратимости A) вектора $v \in V$; тогда если $u = Aq + b + w$, то $F^{-1}(u) = A^{-1}(Aq + b + Av) - A^{-1}b = v$, откуда следует, что $F(L) = L'$, и первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение следует из того, что векторное подпространство AV зависит только от векторного подпространства V, которому параллельно L, и не зависит от q.

Отрезок с концами u, v это множество $\{tu + (1-t)v \mid 0 \le t \le 1\}$. Его образ это $\{A(tu + (1-t)v) + b \mid 0 \le t \le 1\} = \{tAu + tb + (1-t)Av + (1-t)b \mid 0 \le t \le 1\} = \{t(Au + b) + (1-t)(Av + b) \mid 0 \le t \le 1\}$ — отрезок с концами $F(u)$ и $F(v)$; доказано третье утверждение.

Если отрезки pq и rs сонаправлены и $|p-q| / |r-s| = \lambda$, то $p - q = \lambda(r - s)$. Тогда $F(p) - F(q) = Ap - Aq = A(p - q) = \lambda A(r - s) = \lambda(F(r) - F(s))$, откуда следует, что отрезки $F(p)F(q)$ и $F(r)F(s)$ сонаправлены, и отношение их длин равно λ. Теорема доказана. $\square$

Пример того, как аффинные преобразования работают с "нелинейными" объектами:

Пример 5. Образом кривой второго порядка при аффинном преобразовании $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является кривая второго порядка, а образом эллипса — эллипс. Действительно, кривая второго порядка на плоскости есть множество $C = \{(x, y) \mid G(x, y) = 0\}$, где G — многочлен степени 2 от переменных x, y. Пусть $F(v) = Av + b$ — аффинное преобразование, а $F^{-1}(v) = A^{-1}v - A^{-1}b$ — обратное преобразование. В координатах F^{-1}, как и любое аффинное преобразование, линейно неоднродно: $F^{-1}(x, y) = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2)$ Тогда множество $F(C) = \{(x, y) \mid G(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2) = 0\}$. Но функция $\Gamma(x, y) = G(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2)$ — многочлен степени 2, так что $F(C)$ — кривая второго порядка.

Если C — эллипс, то C — ограниченное множество, т.е. C лежит внутри некоторого прямоугольника Π. Образ $F(C)$ — кривая второго порядка, лежащая внутри $F(\Pi)$; как мы уже знаем, $F(\Pi)$ — параллелограмм; тем самым $F(\Pi)$ также лежит внутри некоторого прямоугольника Π_1. Так что $F(C) \subset \Pi_1$ — ограниченное множество. Из всех кривых второго порядка (содержащих более одной точки) ограниченным является только эллипс.