

1. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \quad (n > 1).$$

2. Производящие функции последовательностей (a_n) и (b_n) имеют вид

$$A(s) = \frac{1 + 5s - 30s^2}{1 - 8s + 15s^2}; \quad B(s) = \frac{1 - 10s + 50s^2}{1 - 10s + 25s^2}.$$

Сравните числа a_n и b_n при достаточно больших n .

3. Найдите производящую функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$F'(s) = e^{F(s)}, \quad F(0) = 0.$$

Докажите, что эта функция не является рациональной.

4. Про производящую функцию $A(s)$ последовательности a_0, a_1, a_2, \dots известно, что она удовлетворяет уравнению

$$A(s) \cdot (s^2 + s^4 + s^6 + s^8 + \dots) = s^5 - s^8 + s^{11} - s^{14} + \dots$$

Задайте последовательность (a_n) начальными условиями и линейным рекуррентным соотношением так, чтобы и порядок линейного рекуррентного соотношения, и количество начальных условий были минимальны.

5. Рассмотрим правильные скобочные структуры, состоящие из скобок двух сортов: круглых $()$ и квадратных $[]$. Закрывать круглую скобку может только круглая, а квадратную – только квадратная, причем внутри скобок любого типа могут быть пары скобок любых типов. Обозначим через a_n число таких скобочных структур из n пар скобок (любых типов). Найдите производящую функцию $A(s) = \sum a_n s^n$.