

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ — ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
факультет математики

Дискретная математика 1-й курс

Экзамен 22 июня 2009 г.

ВАРИАНТ 1

В квадратных скобках указано количество баллов за решение задачи. Для получения оценки 10 достаточно набрать 20 баллов.

Задача 1. Для функции $g(y)$, обратной к функции $f(x) = (x + \operatorname{tg} x)/2$ (т.е. $f(g(y)) = y$) выпишите первые три ненулевых члена ее разложения в ряд по степеням переменной y . [1]

Задача 2. Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = -4a_n - 4a_{n-1}$$

и начальными условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

- Выпишите первые 6 членов этой последовательности. [1]
- Найдите производящую функцию для нее. [1]
- Найдите такие c , λ и k , что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / (c\lambda^n n^k)) = 1$. [2]

Задача 3. Подсчитайте число троек циклов длины 3 в группе S_4 , произведение которых имеет циклический тип 2^2 (т.е. является произведением двух независимых транспозиций). [2]

Задача 4. Докажите, что размерность пространства остовных эйлеровых подграфов не удовлетворяет соотношению Татта $f(\Gamma) = f(\Gamma'_e) + f(\Gamma''_e)$. [2]

Задача 5. Рассмотрим язык слов в алфавите $\{a, b\}$, длина которых кратна 3. Постройте конечный автомат с минимально возможным числом состояний, распознающий этот язык. [2]

Задача 6. Триангуляцией многоугольника называется его разбиение на треугольники попарно непесекающимися диагоналями.

- Сколько диагоналей в триангуляции n -угольника? [1]
- Докажите, что хроматические многочлены любых двух триангуляций данного n -угольника равны между собой. [2]

Задача 7. Рассмотрим язык \mathcal{L} в алфавите $\{a, b\}$, состоящий из слов вида $a^i b^j$, где $i \geq j$.

- Подсчитайте число слов длины 7 в языке \mathcal{L} ; [1]
- выпишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка \mathcal{L} ; [3]
- найдите производящую функцию языка \mathcal{L} ; [3]
- установите, рациональна эта производящая функция или нет; [1]
- постройте конечный автомат со стеком (в виде таблицы переходов), распознающий язык \mathcal{L} . [3]

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ — ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
факультет математики

Дискретная математика 1-й курс

Экзамен 22 июня 2009 г.

ВАРИАНТ 2

В квадратных скобках указано количество баллов за решение задачи. Для получения оценки 10 достаточно набрать 20 баллов.

Задача 1. Для функции $g(y)$, обратной к функции $f(x) = x/\cos x$ (т.е. $f(g(y)) = y$) выпишите первые три ненулевых члена ее разложения в ряд по степеням переменной y . [1]

Задача 2. Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$$

и начальными условиями $a_0 = 3$, $a_1 = 4$.

- Выпишите первые 6 членов этой последовательности. [1]
- Найдите производящую функцию для нее. [1]
- Найдите такие c , λ и k , что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / (c\lambda^n n^k)) = 1$. [2]

Задача 3. Подсчитайте число троек циклов длины 3 в группе S_4 , произведение которых имеет циклический тип $1^1 3^1$ (т.е. тоже является циклом длины 3). [2]

Задача 4. Докажите, что размерность пространства коциклов не удовлетворяет соотношению Татта $f(\Gamma) = f(\Gamma'_e) + f(\Gamma''_e)$. [2]

Задача 5. Рассмотрим язык слов в алфавите $\{a, b\}$, в которые каждая из букв a и b входит четное число раз. Постройте конечный автомат с минимально возможным числом состояний, распознающий этот язык. [2]

Задача 6. Триангуляцией многоугольника называется его разбиение на треугольники попарно непесекающимися диагоналями.

- Сколько диагоналей в триангуляции n -угольника? [1]
- Докажите, что хроматические многочлены любых двух триангуляций данного n -угольника равны между собой. [2]

Задача 7. Рассмотрим язык \mathcal{L} в алфавите $\{a, b\}$, состоящий из слов вида $a^i b^j$, где $i \geq j$.

- Подсчитайте число слов длины 7 в языке \mathcal{L} ; [1]
- выпишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка \mathcal{L} ; [3]
- найдите производящую функцию языка \mathcal{L} ; [3]
- установите, рациональна эта производящая функция или нет; [1]
- постройте конечный автомат со стеком (в виде таблицы переходов), распознающий язык \mathcal{L} . [3]