# I Курс. Задание по дискретной математике №1

Дата выдачи: 27.04.2009 Срок сдачи: 11.05.2009

1. Докажите соотношения для обобщенных чисел сочетаний

$$\text{а)}\quad \binom{-a}{k} = (-1)^k\binom{a+k-1}{k}, \qquad \text{б)}\quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}.$$

Воспользовавшись соотношением а), выведите формулу

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{k\geq 0}\binom{a+k-1}{k}x^k.$$

Для $a = 2, 3, \ldots$ получаем: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k\geq 0}(k+1)x^k$, $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k\geq 0}\frac{(k+1)(k+2)}{2}x^k$, и т. д. Каким еще способом можно получить эти соотношения?

Вычислите производящие функции для последовательностей

$$\text{в)}\quad 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots \qquad \text{г)}\quad n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+k)^2, \ldots$$

2. Докажите соотношения

$$\text{а)}\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{a+n}{n}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}s^k = \frac{(1+\sqrt{s})^n + (1-\sqrt{s})^n}{2}.$$

В первой лекции мы вывели соотношение $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, подставляя в производящий многочлен $(1+s)^n$ значение $s = 1$. Пользуясь этим приемом, докажите соотношения

$$\text{в)}\quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{(n-1)}, \qquad \text{г)}\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{(n+1)}-1}{n+1},$$

$$\text{д)}\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{2^{(n+2)}-n-3}{(n+1)(n+2)}, \qquad \text{е)}\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k} = \frac{n2^{(n+1)}+1}{(n+1)(n+2)}.$$

3. Для последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

а) $a_0 = 1,\quad a_1 = 3,\qquad a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2},\quad n > 1\,;$

б) $a_0 = 1,\quad a_1 = 3,\quad a_2 = 21,\qquad a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2},\quad n > 2\,;$

в) $a_0 = 3,\quad a_1 = 3,\quad a_2 = 2,\qquad a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-2} + \frac{1}{27}a_{n-3},\quad n > 2\,;$

найдите производящую функцию и разложите ее в сумму элементарных дробей. Начиная с какого номера $n$ члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

4. Производящая функция последовательности $(a_n)$ имеет вид $\dfrac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите ненулевое линейное рекуррентное соотношение наименьшего порядка, которому удовлетворяют ее члены, начиная с некоторого номера $n$. Начиная с какого номера $n$ члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

5. Пусть последовательность задана как значения квазимногочлена $n^2 + (-1)^n$. Напишите для нее производящую функцию. Каков наименьший порядок ненулевого линейного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяет эта последовательность?

6. Известно, что члены последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют соотношениям

а) $$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + 1 = a_{n+k}, \quad a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 1;$$

б) $$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \frac{1}{n} = a_{n+1}, \quad a_0 = a_1 = 1;$$

в) $$2(na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad a_0 = 0;$$

г) $$\begin{cases} a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} + \alpha, \\ a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} = a_{2n+2} + \beta, \quad a_0 = \gamma; \end{cases}$$

д) $$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} = a_{n+1}, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Найдите производящую функцию последовательности. В случае, если производящая функция рациональна, выпишите линейные рекуррентные соотношения на ее коэффициенты. В противном случае докажите иррациональность производящей функции.

Получите явную формулу для членов последовательности в) и постройте их выражение в виде квазимногочленов.

7. Найдите производящую функцию для произведения Адамара

а) двух последовательностей Фибоначчи: $Fib(s)^{\circ 2} = \frac{1}{1-s-s^2} \circ \frac{1}{1-s-s^2}$

б) двух последовательностей $A(s)$ и $B(s)$, заданных начальными условиями и рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n > 1, \\ &b_0 = 1, \quad b_1 = 4, \quad b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Выпишите линейное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют члены последовательностей $Fib(s)^{\circ 2}$ и $A(s) \circ B(s)$.

8. Найдите производящую функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения

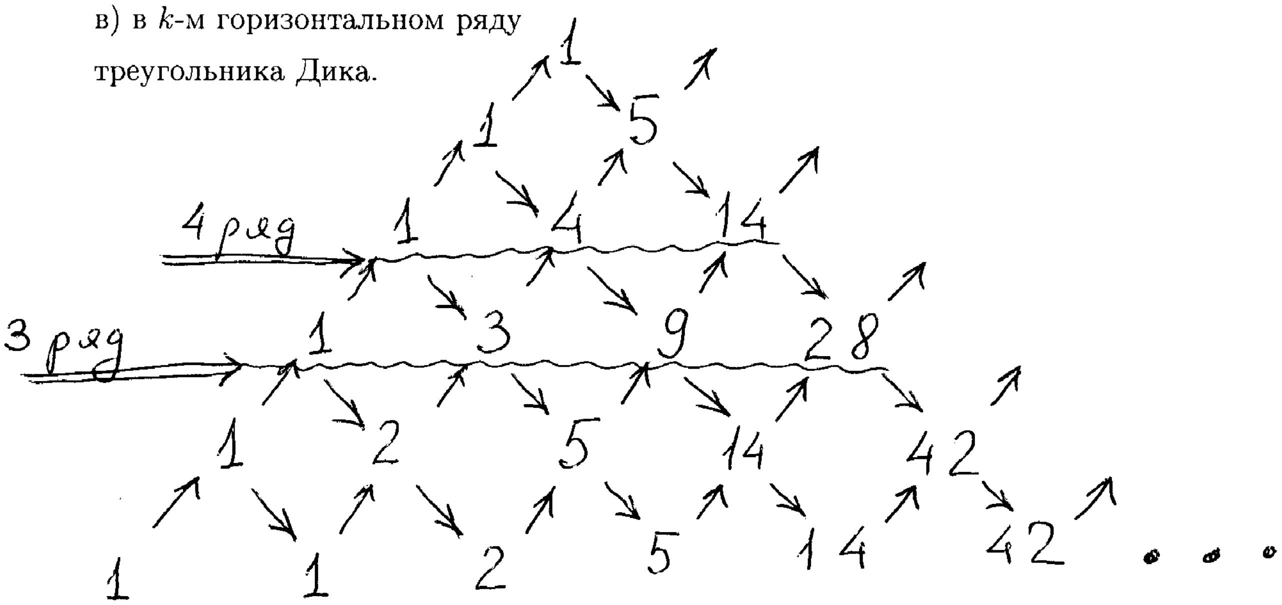
$$F'(s) = \frac{1}{\cos(F(s))}, \quad F(0) = 0.$$

Докажите, что эта функция не является рациональной.

9. Постройте производящие функции для последовательностей чисел, стоящих

а) в третьем снизу горизонтальном ряду (см. рисунок)
б) в четвертом горизонтальном ряду
в) в $k$-м горизонтальном ряду

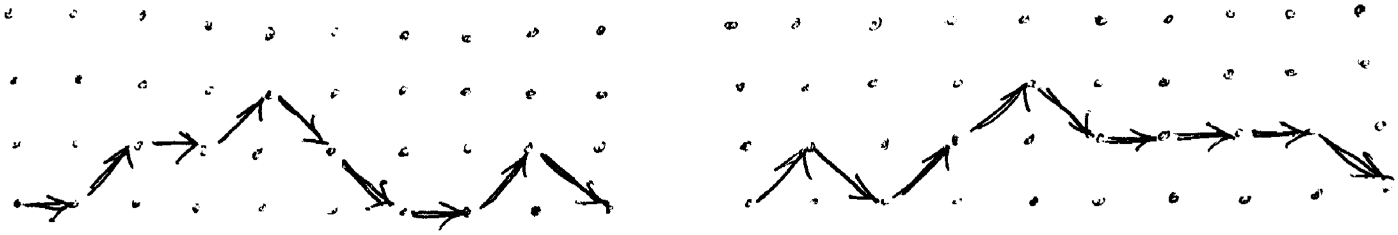
треугольника Дика.




10. Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы $(1,0)$ (см. рисунок). Число путей Моцкина из $n$ векторов называется $n$-м числом Моцкина и обозначается $m_n$: $m_0 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 4$, $m_4 = 9$ и т. д. Найдите производящую функцию для последовательности чисел Моцкина.

Пути Моцкина:

а) б)



В задаче 11 пути вида а) исключаются из рассмотрения (есть горизонтальные вектора в нижнем ряду).

11. Среди всех путей Моцкина выделим подмножество путей, не содержащих горизонтальных векторов в самом нижнем ряду (см. рисунок). Числа таких путей, состоящих из $n$ векторов образуют последовательность $\mu_n$: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 5$ и т. д. Найдите производящую функцию для этой последовательности.

12. На клетчатой плоскости нарисуем всевозможные пары ломаных, стартующие в начале координат и идущие по сторонам клеток вправо и вверх в точку с координатами $(m+1, n+1)$ (см. рисунок). Найдите число пар таких ломаных, которые имеют общими точками лишь начало $(0,0)$ и конец $(m+1, n+1)$, то есть не пересекаются и не соприкасаются по пути. *(Такие пары ломаных ограничивают параллелограммные полимино с фиксированными левым нижним – $(0,0)$, и правым верхним – $(m+1, n+1)$ концами.)*