Глава 9

Алгебра Хопфа графов

9.1 Алгебра Хопфа графов

9.1.1 Структура алгебры

Большинство из рассматривавшихся нами в предыдущих лекциях инвариантов графов являются мультипликативными: их значение на несвязном объединении графов равно произведению их значений на каждом из объединяемых графов. Тот факт, что это свойство присуще большому количеству интересных инвариантов, навел Татта на мысль рассматривать несвязное объединение графов как умножение в кольце, а мультипликативные инварианты — как гомоморфизм колец. Из соображений удобства языка мы будем брать в качестве базового кольца поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел (а не кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$) и говорить об *алгебре* графов над полем $\mathbb{C}$.

Определение 9.1.1. *Алгеброй графов* $\mathcal{G}$ называется бесконечномерная алгебра с единицей над $\mathbb{C}$, порожденная как алгебра простыми связными графами, умножение образующих в которой задается несвязным объединением графов.

Напомним, что *простой граф* не содержит петель и кратных ребер.

Пример 9.1.2. Например, мы можем рассмотреть такой элемент алгебры $\mathcal{G}$:

$$15 + 7\pi K_4 - (2 - \sqrt{-1})C_5 + \frac{3}{4}C_{12};$$

Здесь 15 — коэффициент при пустом графе, через K_4 обозначен полный граф на четырех вершинах, C_5 — цикл на пяти вершинах, а C_{12} — цикл на 12 вершинах. На практике, однако, нам редко придется сталкиваться с иррациональными коэффициентами.

В алгебре $\mathcal{G}$ содержатся конечномерные подпространства $\mathcal{G}_n$, порожденные графами с n вершинами (в качестве $\mathcal{G}_0$ мы берем само поле $\mathbb{C}$ — одномерное пространство, порожденное пустым графом). Их размерность равна числу (как связных, так и несвязных) графов с n вершинами. При малых n ее легко вычислить, однако при больших значениях n это вычисление становится сложной задачей. Пространства $\mathcal{G}_n$ не просто содержатся в $\mathcal{G}$; все пространство $\mathcal{G}$ раскладывается в прямую сумму этих подпространств:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots . \qquad (9.1)$$

Это означает, что любой элемент $g \in \mathcal{G}$ единственным образом представляется в виде суммы

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots ,$$

где $g_i \in \mathcal{G}_i$, и лишь конечное число слагаемых в правой части отлично от нуля. Более того, произведение элементов из $\mathcal{G}_k$ и $\mathcal{G}_l$ лежит в $\mathcal{G}_{k+l}$. Другими, словами, разложение (9.1) является *градуировкой* алгебры $\mathcal{G}$, а умножение *согласовано* с этой градуировкой. Мы будем обозначать операцию умножения буквой m или, как обычно, просто записывать сомножители подряд. Правильно считать, что умножение является билинейным градуированным отображением тензорного квадрата алгебры в саму алгебру:

$$m : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}; \qquad m : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{G}_l \to \mathcal{G}_{k+l}.$$

Роль единицы алгебры $\mathcal{G}$ играет пустой граф. Единицу можно понимать как гомоморфизм $e : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$, который является изоморфизмом на $\mathcal{G}_0$ и отображает в нуль все $\mathcal{G}_i$ при $i > 0$; этот гомоморфизм сопоставляет любому элементу в $\mathcal{G}$ коэффициент при пустом графе в этом элементе.

9.1.2 Структура коалгебры

Понятия коалгебры, биалгебры и алгебры Хопфа возникли в топологии. Если A — алгебра, то на двойственном к ней пространстве A^* (т.е. на пространстве линейных функционалов $A \to \mathbb{C}$) возникает *коумножение*. Это операция

$$\mu : A^* \to A^* \otimes A^*,$$

заданная следующим образом:

$$\mu(f)(a \otimes b) = f(m(a, b))$$

для любого элемента $f \in A^*$ и любых $a, b \in A$. Очевидно, что коумножение линейно. Если при этом алгебра A градуирована,

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots ,$$

то и алгебра A^* градуирована:

$$A^* = A_0^* \oplus A_1^* \oplus A_2^* \oplus \dots .$$

(В случае, если градуировка содержит бесконечное число членов, это определение требует уточнения, но мы не будем им сейчас заниматься.) Коумножение согласовано с градуировкой двойственного пространства:

$$\mu : A_n^* \to A_0^* \otimes A_n^* \oplus A_1^* \otimes A_{n-1}^* \oplus \dots \oplus A_n^* \otimes A_0.$$

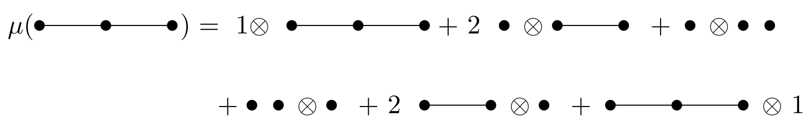

Рис. 9.1: Копроизведение графа

В топологии обычно A — алгебра когомологий некоторого топологического пространства.

Иногда оказывается, что между алгеброй A и двойственным к ней пространством A^* можно установить естественный изоморфизм. Так бывает, например, если топологическое пространство компактно, и для его когомологий имеет место двойственность Пуанкаре. В таком случае мы получаем одно пространство A с двумя структурами — алгебры и коалгебры, или, как говорят, со структурой *биалгебры*. При этом умножение является гомоморфизмом структуры коалгебры, а коумножение — гомоморфизмом структуры алгебры, т.е.,

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$$

для любой пары a, b элементов пространства A.

На алгебре $\mathcal{G}$ структура коалгебры задается с помощью следующего коумножения. Для графа Γ и подмножества $J \subset V(\Gamma)$ его вершин обозначим через $J(\Gamma)$ *полный* подграф графа Γ на вершинах J, т.е. подграф, множество вершин которого совпадает с J, а множество ребер состоит из тех ребер графа Γ, оба конца которых лежат в J. Положим

$$\mu(\Gamma) = \sum_{I \sqcup J = V(\Gamma)} I(\Gamma) \otimes J(\Gamma). \tag{9.2}$$

Пример копроизведения графа приведен на рис. 9.1.

Коединица задается гомоморфизмом $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathcal{G}$, который осуществляет изоморфизм $\mathbb{C} \to \mathcal{G}_0$.

Теорема 9.1.3. *Пространство $\mathcal{G}$ с введенными на нем умножением и коумножением является градуированной биалгеброй.*

Более того, эта биалгебра *коммутативна* и *кокоммутативна*, где кокоммутативность понимается в следующем смысле: образ $\mu(g)$ любого элемента $g \in \mathcal{G}$ переходит в себя при отображении $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$, переставляющем сомножители в произведении, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

Пример 9.1.4 *(полные графы и леса).* Подалгебра в $\mathcal{G}$, порожденная полными графами K_i, $i = 1, 2, \ldots$, выдерживает и коумножение. На полных графах коумножение имеет вид

$$\mu(K_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} K_i \otimes K_{n-i}.$$

Другой пример подалгебры в $\mathcal{G}$ дает подалгебра *лесов* – линейных комбинаций графов без циклов.

Пример 9.1.5 *(некоммутативная биалгебра).* Стандартный пример некоммутативной биалгебры строится как групповая алгебра произвольной группы H. Групповая алгебра $\mathbb{C}[H]$ состоит из элементов вида $\sum c_i h_i$, где $c_i \in \mathbb{C}$, $h_i \in H$; произведение индуцировано произведением в группе. Коумножение на элементах группы определено формулой $\mu(h) = h \otimes h$; на остальные элементы оно продолжается по линейности.

9.2 Примитивные элементы

Некоторые элементы в биалгебре выглядят «проще» других. Они играют важную роль образующих биалгебры.

Пример 9.2.1 *(Полиномиальная биалгебра).* Рассмотрим алгебру многочленов от n переменных $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. В ней легко ввести коумножение, положив $\mu(x_l) = 1 \otimes x_l + x_l \otimes 1$ для любой переменной x_l. Это означает, что копроизведение монома $y_1 \dots y_k$, где каждый из элементов y_i равен одному из x_l, равно

$$\mu(y_1 \dots y_k) = \sum_{I \sqcup J = \{1, \dots, k\}} \prod_{i \in I} y_i \otimes \prod_{j \in J} y_j.$$

Полиномиальная биалгебра градуирована: она раскладывается в прямую сумму своих однородных составляющих — подпространств однородных многочленов данной степени. Эту градуировку можно изменить, указав *вес* каждой переменной. Тогда полиномиальная биалгебра раскладывается в прямую сумму составляющих, однородных относительно выбранного веса. При этом число переменных может быть и бесконечным — требуется лишь, чтобы число переменных веса не выше N было конечно для любого значения N. В этом случае все взвешенные однородные составляющие будут иметь конечную размерность.

Определение 9.2.2. Элемент p биалгебры называется *примитивным*, если

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1.$$

В частности, все переменные x_i в полиномиальной биалгебре являются примитивными. Это, однако, не единственные примитивные элементы в ней: любой линейный многочлен также является примитивным элементом. Вообще, примитивные элементы биалгебры образуют векторное пространство.

В градуированной биалгебре подпространство примитивных элементов также градуировано,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3 \oplus \dots,$$

где $\mathcal{P}_i$ — подпространство примитивных элементов степени i. Обратите внимание на то, что градуировка примитивных элементов начинается с единицы, а не с нуля. Причина этого в том, что $\mu(1) = 1 \otimes 1$, поэтому 1, а значит и никакой другой элемент степени 0, не может быть примитивным элементом.

Если в каждом примитивном подпространстве данного веса в полиномиальной биалгебре вместо базиса из переменных выбрать любой другой базис, то полиномиальная биалгебра будет естественно изоморфна биалгебре многочленов в этом новом базисе. Следующая теорема утверждает, что такая же картина наблюдается в произвольной коммутативной кокоммутативной градуированной биалгебре.

Теорема 9.2.3 (Милнор–Мур). *Если в произвольной коммутативной кокоммутативной градуированной биалгебре выбрать базис $p_{i1}, \dots, p_{ik_i}$ в каждом из пространств $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2, \dots$ ее однородных примитивных элементов, то эта биалгебра естественно изоморфна градуированной полиномиальной биалгебре $\mathbb{C}[p_{11}, \dots, p_{1k_1}, p_{21}, \dots]$ с градуировкой элемента p_{ij} равной i.*

Замечание 9.2.4. В полиномиальной биалгебре есть *антипод* — автоморфизм $p \mapsto -p$, переводящий каждый примитивный элемент в противоположный. Биалгебра с антиподом называется *алгеброй Хопфа.* Тем самым, все рассматриваемые ниже биалгебры являются алгебрами Хопфа. Мы, однако, будем, как правило, называть их просто биалгебрами.

В частности, биалгебра графов $\mathcal{G}$ тоже является полиномиальной биалгеброй от своих примитивных элементов.

Помимо подпространства примитивных элементов каждая однородная составляющая градуированной биалгебры содержит подпространство *разложимых* элементов $\mathcal{D}_n$. Это подпространство порождено элементами, представимыми в виде произведения xy, где порядок каждого из элементов x, y меньше n. Другими словами, это подпространство многочленов веса n, не содержащих мономов степени 1. Это означает, что соответствующая однородная компонента раскладывается в прямую сумму $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{D}_n$ примитивного и разложимого подпространств. для биалгебры графов это замечание означает, в частности, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 9.2.5. *Размерность пространства примитивных элементов $\mathcal{P}(\mathcal{G}_n)$ порядка n в биалгебре графов равна числу связных графов с n вершинами.*

Замечание 9.2.6 *(о размерностях).* По размерностям $d_1, d_2, \dots$ однородных подпространств примитивных элементов однозначно восстанавливаются размерности однородных пространств биалгебры. Размерность n-го однородного подпространства равна коэффициенту при t^n в производящей функции

$$\frac{1}{(1-t)^{d_1}(1-t^2)^{d_2}(1-t^3)^{d_3}\dots}.$$

Эту же формулу можно использовать для восстановления значений d_i, если размерности однородных подпространств биалгебры известны.

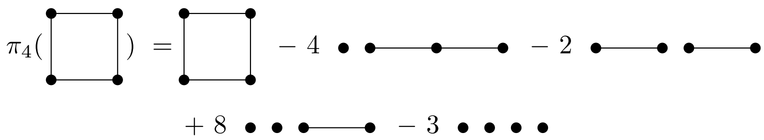

Рис. 9.2: Проектирование 4-цикла на подпространство примитивных элементов

Представимость однородного подпространства биалгебры в виде $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{D}_n$ означает, что в этом подпространстве существует однозначно определенная проекция вдоль подпространства разложимых элементов на подпространство примитивных элементов. Для полиномиальной биалгебры проекция просто сопоставляет любому многочлену его линейную часть. Для биалгебры графов она выглядит следующим образом.

Утверждение 9.2.7. *Линейное отображение $\pi_n : \mathcal{G}_n \to \mathcal{G}_n$, заданное формулой*

$$\pi_n : \Gamma \mapsto \Gamma - 1! \sum_{I_1 \sqcup I_2 = V(\Gamma)} I_1(\Gamma) I_2(\Gamma) + 2! \sum_{I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_3 = V(\Gamma)} I_1(\Gamma) I_2(\Gamma) I_3(\Gamma) - \dots ,$$

где суммирования в правой части идут по всем разбиениям множества вершин $V(\Gamma)$ графа Γ на непустые *подмножества, является проектированием на подпространство примитивных элементов вдоль подпространства разложимых элементов.*

Пример 9.2.8. Результат $\pi_4(C_4)$ проектирования квадрата C_4 изображен на рис. 9.2.

Проектирование на подпространство примитивных элементов является частным случаем следующей конструкции. Пусть $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ – градуированная биалгебра; рассмотрим пространство $\mathrm{Hom}(A, K)$ линейных отображений $A \to K$, где K – произвольная алгебра над $\mathbb{C}$. На этом пространстве можно ввести *произведение свертки*:

$$\varphi_1 \varphi_2 (a) = m_K (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \mu(a),$$

где m_K – умножение в алгебре K. При наличии произведения мы можем рассматривать степенные ряды от линейных отображений. В частности, любое линейное отображение $\varphi : A \to A$, являющееся гомоморфизмом коалгебр, представимо в виде $\varphi = 1 + \varphi_0$, где φ_0 принимает значение 0 на A_0. Поэтому определен логарифм

$$\log(\varphi) = \log(1 + \varphi_0) = \varphi_0 - \frac{1}{2}\varphi_0^2 + \frac{1}{3}\varphi_0^3 - \dots .$$

Действительно, φ_0 принимает значение 0 на A_0, поэтому φ_0^2 принимает значение 0 на $A_0 \oplus A_1$, φ_0^3 принимает значение 0 на $A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$, и т.д. В результате для любого элемента $a \in A$ лишь конечное число слагаемых в разложении $\log(\varphi)a$ отлично от нуля, поэтому линейное отображение $\log(\varphi) : A \to A$ корректно определено.

Утверждение 9.2.9 (Schmitt). *Для любого линейного отображения $\varphi : A \to A$, являющегося гомоморфизмом коалгебр, его логарифм отображает A в подпространство примитивных элементов $P(A)$. Логарифм $\log(I)$ тождественного отображения $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ совпадает с проекцией $\pi : \mathcal{G} \to P(\mathcal{G})$.*

Например,

$$\log(I)(K_2) = I_0(K_2) - \frac{1}{2} I_0^2(K_2) = K_2 - K_1^2.$$

9.3 Факторалгебры биалгебры графов

В алгебре Хопфа графов образы связных графов при проектировании образуют базисы однородных пространств примитивных элементов. Связные графы устроены так же сложно, как и общие графы, и ничего хорошего про них в целом сказать нельзя. Интерес представляют разумные факторбиалгебры биалгебры графов по модулю некоторых линейных отношений эквивалентности. Придумать такие отношения — так чтобы фактор сохранял структуру биалгебры — совсем непросто.

9.3.1 4-биалгебра

Эта биалгебра получается, если профакторизовать биалгебру графов по 4-*членному соотношению*

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \widetilde{\Gamma}_{AB} - \widetilde{\Gamma}'_{AB}. \tag{9.3}$$

Здесь Γ — произвольный граф, $A, B \in V(\Gamma)$ — произвольная упорядоченная пара вершин в нем. Граф Γ'_{AB} получен из Γ удалением ребра AB, если оно существует, и его присоединением в противном случае, т.е., изменением примыкания вершин A и B. Операция $\Gamma \mapsto \widetilde{\Gamma}_{AB}$ меняет примыкание к вершине A всех вершин, соединенных с вершиной B, оставляя все прочие примыкания неизменными. Результат применения этой операции к графу K_4 изображен на рис. 9.3. Заметим, что результат применения этой операции действительно может зависеть от порядка вершин A, B. Простейший пример дается квадратом с диагональю: у стороны этого квадрата два различных порядка вершин.

Причины введения 4-членных соотношений будут обсуждаться при изучении инвариантов Васильева узлов.

Профакторизуем биалгебру графов по 4-членным соотношениям. К счастью, они однородны — все слагаемые имеют одинаковое число вершин — и

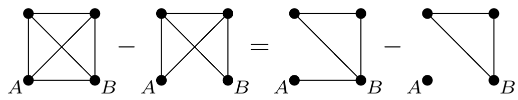

Рис. 9.3: 4-членное соотношение на графах с четырьмя вершинами

поэтому факторпространства $\mathcal{F}_n$ пространств $\mathcal{G}_n$ по 4-членным соотношениям сохраняют естественную градуировку.

Утверждение 9.3.1. *Факторпространство*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \dots$$

снабжено структурой градуированной биалгебры, унаследованной от биалгебры графов.

Доказательство. Мы должны проверить, что 4-членное соотношение (9.3) уважает умножение и коумножение в биалгебре графов. Для умножения это утверждение очевидно: 4-членное соотношение сохраняется после умножения всех четырех слагаемых на один и тот же граф. В случае коумножения проверим два случая. Множества вершин всех четырех графов отождествлены между собой; будем обозначать это множество через V. Член, отвечающий подмножеству $I \subset V(\Gamma)$ в копроизведении графа Γ, будем обозначать через $\mu_I(\Gamma)$:

$$\mu_I(\Gamma) = I(\Gamma) \otimes J(\Gamma),$$

где $J = V(\Gamma) \setminus I$. Если обе вершины A, B попадают в одно подмножество $I \subset V$, то справедливо равенство

$$I(\Gamma) - I(\Gamma)'_{AB} = \widetilde{I(\Gamma)}_{AB} - \widetilde{I(\Gamma)}'_{AB},$$

а значит и равенство

$$I(\Gamma) - I(\Gamma'_{AB}) = I(\widetilde{\Gamma}_{AB}) - I(\widetilde{\Gamma}'_{AB}),$$

поскольку каждый член последнего равенства совпадает с соответствующим членом предыдущего. Для $J = V \setminus I$ имеем

$$J(\Gamma) = J(\Gamma'_{AB}) = J(\widetilde{\Gamma}_{AB}) = J(\widetilde{\Gamma}'_{AB}).$$

Умножая все члены предыдущего равенства тензорно на этот общий множитель $J(\Gamma)$, мы приходим к нужному равенству

$$\mu_I(\Gamma) - \mu_I(\Gamma'_{AB}) = \mu_I(\widetilde{\Gamma}_{AB}) - \mu_I(\widetilde{\Gamma}'_{AB}).$$

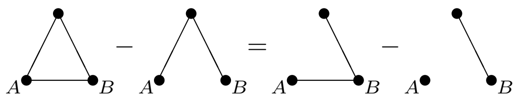

Рис. 9.4: 4-членное соотношение для графов с 3 вершинами

Замена I на J оставляет равенство верным. Если же вершина A принадлежит множеству I, а вершина B — его дополнению J, то равенство даже упрощается:

$$\mu_I(\Gamma) = \mu_I(\Gamma'_{AB})$$

и то же для правой части. Суммируя члены μ_I по всем $I \subset V$, мы приходим к требуемому равенству.

Пример 9.3.2. На графах с двумя вершинами нетривиальных 4-членных соотношений нет. Пространство $\mathcal{F}_2$ двумерно. Пространство примитивных элементов в нем одномерно и порождено разностью двух двувершинных графов.

На графах с тремя вершинами имеется одно нетривиальное четырехчленное соотношение, см. рис. 9.4. Поэтому пространство $\mathcal{F}_3$ трехмерно. Подпространство примитивных элементов в нем одномерно и порождено элементом $\pi_3(A_3)$.

9.3.2 Взвешенные графы

Расставим в вершинах простого графа натуральные числа — *веса вершин*. Такой граф будем называть *взвешенным*. *Весом* графа называется сумма весов всех его вершин. Рассмотрим конечномерные пространства $\mathcal{WG}_n$, порожденные графами веса n. Их прямая сумма

$$\mathcal{WG} = \mathcal{WG}_0 \oplus \mathcal{WG}_1 \oplus \mathcal{WG}_2 \oplus \dots$$

наделена структурой градуированной биалгебры. И умножение, и коумножение задаются, как и в случае обычных графов.

Введем следующее отношение эквивалентности на множестве взвешенных графов:

$$\Gamma = \Gamma'_e + \Gamma''_e, \tag{9.4}$$

где e — произвольное ребро взвешенного графа Γ. Это соотношение полностью совпадает с соотношением Татта, однако в нем операция стягивания ребра $\Gamma \mapsto \Gamma''_e$ имеет другой смысл. При стягивании ребра появившиеся кратные ребра заменяются однократными, а вес новой вершины полагается равным сумме весов тех вершин, из которых она образовалась. В результате соотношение (9.4) становится однородным: веса всех трех входящих в него графов одинаковы. Факторизуя биалгебру $\mathcal{WG}$ по соотношениям (9.4), мы получаем новую биалгебру

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots.$$

Утверждение о том, что $\mathcal{W}$ действительно является градуированной коммутативной кокоммутативной биалгеброй мы оставляем в качестве упражнения.

Покажем теперь, что взвешенные графы попали в этот раздел не зря: биалгебра $\mathcal{W}$ является факторбиалгеброй биалгебры $\mathcal{G}$. Для этого определим гомоморфизм $\mathcal{G} \to \mathcal{WG}$, сопоставив каждому графу тот же взвешенный граф с весами всех вершин равными 1. Мы хотим показать, что композиция этого гомоморфизма с факторизацией по модулю соотношений (9.4) является эпиморфизмом биалгебр, а значит $\mathcal{W}$ действительно является факторбиалгеброй биалгебры $\mathcal{G}$.

Начнем с доказательства структурной теоремы для биалгебры $\mathcal{W}$, аналогичной теореме Татта.

Теорема 9.3.3. *Биалгебра $\mathcal{W}$ изоморфна биалгебре многочленов $\mathbb{C}[s_1, s_2, \dots]$, градуированной присвоением переменной s_i веса i, $w(s_i) = i$.*

Доказательство. Как и в ситуации с соотношением Татта, каждый граф эквивалентен в $\mathcal{W}$ линейной комбинации графов без ребер: в правой части соотношения (9.4) стоят графы с меньшим числом ребер, чем в левой части. Каждый взвешенный граф без ребер является несвязным объединением вершин некоторого веса. Сопоставив вершине веса i переменную s_i, мы сопоставляем графу веса n некоторый взвешенно-однородный многочлен веса n от переменных s_i. Единственное, что осталось доказать — это то, что сопоставление корректно определено. Это достигается указанием универсального инварианта:

$$W(\Gamma) = \sum_{\gamma} \prod_{\gamma_i} (-1)^{\beta_1(\gamma_i)} s_{w(\gamma_i)}.$$

Здесь суммирование идет по всем остовным подграфам γ графа Γ, т.е. по всевозможным подмножествам в $E(\Gamma)$, произведение берется по всем связным компонентам γ_i графа γ, а $\beta_1(\gamma_i)$ – цикломатическое число графа.

Например, значение инварианта W на треугольнике C_3 с весами вершин a, b, c равно

$$W(C_3) = s_a s_b s_c + s_{a+b} s_c + s_{a+c} s_b + s_{b+c} s_a + 2 s_{a+b+c}.$$

Очевидно, что на одновершинном графе с вершиной веса n функция W принимает значение s_n. Проверку того, что W удовлетворяет соотношениям (9.4) и определяет, тем самым, линейный функционал на $\mathcal{W}$, мы оставляем читателям.

Для доказательства того, что построенный гомоморфизм $\mathcal{G} \to \mathcal{W}$ является эпиморфизмом, осталось проверить, что одновершинный граф произвольного веса n лежит в образе этого гомоморфизма. Для этого достаточно взять образ $\pi_n(A_n)$ проекции на примитивные элементы графа-цепочки с n вершинами.

Утверждение 9.3.4. *Гомоморфизм биалгебры графов в биалгебру взвешенных графов по модулю соотношений (9.4) пропускается через 4-биалгебру графов, т.е. существует цепочка эпиморфизмов $\mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{W}$.*

Доказательство Нам достаточно доказать существование только второго гомоморфизма. В биалгебре взвешенных графов каждая из разностей в левой и правой частях 4-членного соотношения

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \widetilde{\Gamma}_{AB} - \widetilde{\Gamma}'_{AB}$$

эквивалентна графу со стянутым ребром AB. Нетрудно видеть, что эти два графа совпадают, причем вес новой вершины в обоих случаях равен 2. Утверждение доказано.

9.4 4-инварианты

Построенный универсальный инвариант взвешенных графов полностью описывает структуру биалгебры взвешенных графов и все мультипликативные линейные функционалы на ней. Однако ситуация с 4-биалгеброй обстоит не так просто. Причина этого в том, что 4-членное соотношение не позволяет упростить каждый граф: графы Γ и $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ могут иметь, скажем, одинаковое число ребер. В результате у нас нет нетавтологического описания двойственной биалгебры $\mathcal{F}^*$ – биалгебры 4-инвариантов. Поэтому особый интерес вызывает построение отдельных примеров и серий примеров 4-инвариантов. Мы будем определять 4-инварианты их значениями на графах, подразумевая что на линейные комбинации графов они продолжаются по линейности.

Пример 9.4.1 *(хроматический многочлен).* Согласно наблюдению С. В. Дужина, хроматический многочлен является 4-инвариантом. Для проверки этого достаточно заметить, как мы сделали это в доказательстве утверждения 9.3.4, что в результате стягивания ребра AB в графах Γ и $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ мы получаем, после замены кратных ребер однократными, одинаковые графы. Впрочем, хроматический многочлен – по существу единственный из инвариантов Татта, являющийся одновременно 4-инвариантом.

Пример 9.4.2 *(вершинные четырехугольники).* Назовем *вершинным четырехугольником* в графе Γ набор из четырех вершин $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset V(\Gamma)$, таких что при некотором циклическом порядке (i, j, k, l) на множестве индексов $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ в графе есть ребра $A_iA_j, A_jA_k, A_kA_l, A_lA_i$. Тогда число $Q^v(\Gamma)$ вершинных четырехугольников в графе Γ является 4-инвариантом.

Это утверждение можно проверить для четырехчленного соотношения на рис. 9.3: оба графа в левой его части содержат по единственному вершинному четырехугольнику, тогда как в графах в правой части таких четырехугольников нет.

Для его доказательства можно сначала проверить его на всех графах с четырьмя вершинами. Обозначим теперь через Q_4^v инвариант графов, равный числу вершинных четырехугольников на всех графах с четырьмя вершинами и нулю на всех остальных графах. Рассмотрим также графовый инвариант U, тождественно равный 1 на всех графах. Очевидно, что и функция Q_4^v, и функция U, являются 4-инвариантами. Поэтому их произведение свертки $Q_4^v U$ тоже является 4-инвариантом. Непосредственная проверка показывает, что $Q_4^v U = Q^v$. Очевидно также, что этот инвариант мультипликативен.

Можно проверить, что Q^v является 4-инвариантом, и непосредственно. Разность значений этой функции на слагаемых в левой (соотв., правой) части 4-членного соотношения равна числу таких вершинных прямоугольников в Γ (соотв., в $\widetilde{\Gamma}_{AB}$), что соответствующий им набор ребер обязательно содержит ребро AB. Но, как нетрудно видеть, между такими прямоугольниками в Γ и в $\widetilde{\Gamma}_{AB}$ существует естественное взаимно однозначное соответствие.

Приведенный пример является частным случаем следующего общего утверждения:

Утверждение 9.4.3. *Если f – 4-инвариант графов с n вершинами, $f \in \mathcal{F}_n^*$, то функция*

$$F(\Gamma) = \sum_J f(J(\Gamma)),$$

где суммирование идет по всем n-вершинным подмножествам множества $V(\Gamma)$, является 4-инвариантом графов.

Замечание 9.4.4 *(сложность вычисления).* Инварианты описанного в этом утверждении типа, принимающие нулевое значение на несвязных графах, полиномиально вычислимы (что бы это ни значило). При фиксированном значении n сложность их вычисления растет пропорционально $|V(\Gamma)|$. Действительно, для их вычисления нужно проанализировать не все n-вершинные подграфы графа, а лишь все окрестности радиуса n каждой из его вершин.

Пример 9.4.5 *(реберные многоугольники по модулю 2). Реберным четырехугольником* в графе Γ называется набор e_1, e_2, e_3, e_4 различных ребер графа, образующих замкнутый путь в нем. Число реберных четырехугольников не является 4-инвариантом, однако взятое по модулю 2 оно становится 4-инвариантом. Например, в первом графе в левой части рис. 9.3 три реберных четырехугольника, во втором такой четырехугольник один, а в графах в правой части их вообще нет.

То же самое утверждение справедливо и для числа реберных n-угольников для любого $n \geq 4$ (но не для $n = 3$). Действительно, обозначим через $E_k(\Gamma)$ число реберных k-угольников в Γ. Применяя эту функцию к обеим частям

4-членного соотношения, мы получим, что в правой (соотв., левой) его части стоит число реберных k-угольников в Γ (соотв., в $\widetilde{\Gamma}_{AB}$), содержащих ребро AB.

Во всяком таком k-угольнике есть цепочка $CABD$, и мы можем выделить три типа цепочек в зависимости от того, как C примыкает к B, а D примыкает к A:

- C примыкает к B, а D примыкает к A;
- C примыкает к B, а D не примыкает к A;
- C не примыкает к B.

Реберные k-угольники в Γ, принадлежащие ко второму классу, находятся во взаимно-однозначном соответствии с k-угольниками в $\widetilde{\Gamma}_{AB}$, содержащими путь $CBAD$. Реберные k-угольники третьего типа одинаковы в обоих графах. Наконец, реберные k-угольники первого типа разбиваются на пары: цепь $CABD$ можно заменить цепью $CBAD$. Таким образом, число реберных k-угольников первого типа четно в обоих графах, и утверждение доказано.

Пример 9.4.6 *(совершенные паросочетания).* Число совершенных паросочетаний в графе является 4-инвариантом. Проверку этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим, однако, что это не слишком мощный инвариант, так как он является экспонентой следующего очень простого 4-инварианта. Если мы положим $m(\Gamma)$ равным 1 на графе с двумя вершинами и одним ребром, и 0 на всех остальных графах, то число совершенных паросочетаний дается экспонентой

$$e^m = 1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \dots .$$

Умножение здесь понимается в смысле умножения свертки.

Пример 9.4.7 *(коранг матрицы примыканий).* Если мы занумеруем произвольным образом вершины графа Γ, то мы можем сопоставить ему *матрицу примыканий* $A(\Gamma)$ размера $|V(\Gamma)|\times|V(\Gamma)|$. На пересечении i-ой строки и j-го столбца этой матрицы стоит 1, если i-ая и j-ая вершина соединены ребром, и 0 в противном случае. На диагонали матрицы стоят нули.

Матрица примыканий симметрична. Мы рассматриваем элементы этой матрицы как элементы кольца $\mathbf{Z}_2$. Тогда *коранг* матрицы примыканий является 4-инвариантом. Разумеется, это утверждение справедливо и для ее ранга, однако в дальнейшем нам понадобится именно коранг. Доказательство основано на том, что коранг матрицы примыканий графа не меняется при переходе от Γ к $\widetilde{\Gamma}_{AB}$. Действительно, если вершина A имеет номер 1, а вершина B – номер 2, то $A(\widetilde{\Gamma}_{AB}) = C^T A(\Gamma) C$, где матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а матрица C^T получается из C транспозицией.

9.5 Оснащенные модификации графовых алгебр

Рассмотрение матрицы примыканий графа и ее коранга показывает, что с точки зрения 4-инвариантов граф — не вполне естественный объект. Неестественность вызвана тем, что на диагонали матрицы примыканий обязательно стоят нули, в то время как остальные ее элементы могут быть как нулями, так и единицами. Естественно попробовать обобщить изложенные выше конструкции на *оснащенные графы* — графы, у которых каждой вершине приписан элемент кольца $\mathbf{Z}_2$, который может быть как нулем, так и единицей. Умножение и коумножение оснащенных графов определяются, как и в неоснащенном случае. В результате мы получаем биалгебру оснащенных графов $\mathcal{G}^f$.

Четырехчленное соотношение тоже переносится на оснащенные графы. Именно, мы сохраняем его прежний вид, причем действие операции $\Gamma \mapsto \widetilde{\Gamma}_{AB}$ понимается следующим образом: если оснащение вершины B равно 0, то операция выполняется точно так же, как и в неоснащенном случае. Если же оснащение вершины B равно 1, то дополнительно оснащение вершины A меняется на противоположное и примыкание вершин A и B заменяется противоположным. Такое определение операции полностью согласуется с ее пониманием как операции замены матрицы примыканий посредством преобразования C.

Мы оставляем читателю проверку того, что коумножение в $\mathcal{G}^f$ уважает оснащенное 4-членное соотношение, и что, тем самым, определена градуированная факторбиалгебра

$$\mathcal{F}^f = \mathcal{F}_0^f \oplus \mathcal{F}_1^f \oplus \mathcal{F}_2^f \oplus \dots.$$

Помимо того, что биалгебра $\mathcal{F}^f$ представляет интерес сама по себе, важную роль играет наличие двух гомоморфизмов $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^f$. Первый из них задается заданием нулевого оснащения у каждой вершины графа Γ, второй менее тривиален. При втором гомоморфизме мы сопоставляем каждому графу Γ альтернированную сумму всех оснащенных графов с несущим графом Γ. Гипотетически этот гомоморфизм является вложением. Вне зависимости от того, так это или нет, поднятие относительно этого гомоморфизма всякого элемента двойственной биалгебры $(\mathcal{F}^f)^*$ определяет 4-инвариант графов, и было бы чрезвычайно интересно понять, какие 4-инварианты имеют такое происхождение.

Пример 9.5.1. Нам придется еще встретиться с 4-инвариантом, значение которого на графе Γ равно

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} N^{\operatorname{corank} A(\Gamma^{\sigma})},$$

где через $A(\Gamma^\sigma)$ обозначена матрица примыканий графа Γ с оснащением σ, а $\operatorname{sign}(\sigma)$ – число единиц в оснащении.

9.6 Задачи

Задача 9.1. Проверьте, что всякий примитивный элемент полиномиальной биалгебры является линейным многочленом.

Задача 9.2. Найдите базисы в пространствах примитивных элементов $\mathcal{P}(\mathcal{G}_n)$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

Задача 9.3. Выпишите результаты проектирования связных графов с числом вершин не больше 4 на подпространство примитивных элементов. Проверьте, что их образы образуют базисы в соответствующих однородных пространствах примитивных элементов.

Задача 9.4. Докажите, что сумма коэффициентов любого примитивного элемента алгебры графов равна нулю.

Задача 9.5. Подсчитайте размерности пространств $\mathcal{F}_4$ и $\mathcal{F}_5$. Найдите размерности подпространств примитивных элементов в них и образующие в этих подпространствах.

Задача 9.6. Пусть N – формальная переменная. Покажите, что отображение $\Gamma \mapsto N^{\operatorname{corank} A(\Gamma)}$ является мультипликативным 4-инвариантом со значениями в $\mathbb{C}[N]$.

Задача 9.7. Найдите размерности пространств примитивных элементов в $\mathcal{F}_k^f$ для $k = 1, 2, 3, 4$.