

Глава 8

Соотношение удаление-стягивание и теорема Татта

Графы — простейшие топологические объекты. Их простота определяется тем, что их топологическая размерность 1 — первая содержательная размерность. Однако уже в этом случае природа изучаемых объектов чрезвычайно богата и содержательна.

Графы — чрезвычайно универсальный способ представления самых разнообразных данных. Эта всеобщность означает, что невозможно создать теорию графов: такая теория должна была бы охватывать множество далеких друг от друга областей. Однако если не задаваться столь всеобъемлющей задачей, то графовое представление может оказаться весьма удобным языком описания объектов какой-нибудь алгебраической или топологической теории и формулировки ее результатов, а также полезным источником для обнаружения связей между различными теориями.

8.1 Графы, изоморфизм и инварианты

Нас будут интересовать *инварианты* графов, т.е. функции на графах, принимающие одинаковые значения на изоморфных графах. Вообще, придумать инвариант несложно — годится любая функция, выраженная в терминах, не использующих конкретные множества вершин и ребер. Вот примеры таких функций:

- число вершин и число ребер в графе;
- максимальная степень вершины;
- максимальное расстояние между вершинами графа;

- ранг матрицы смежности графа;

и т.д. (*Матрица смежности* графа строится следующим образом. Занумеруем все n вершин графа числами от 1 до n . Матрица смежности — это $n \times n$ -матрица, у которой в клетке (i, j) стоит 1, если вершины i и j соединены ребром, и 0 — в противном случае. На диагонали в матрице смежности стоят нули. Это очень полезный способ представления графа. Ясно, что ранг матрицы смежности — рассматриваемой как матрица с элементами из \mathbb{Z}_2 — является инвариантом графа.) Вы можете поупражняться в придумывании своих собственных инвариантов.

Поскольку придумать инвариант графов несложно, встает вопрос: как сравнивать инварианты? Какие из них лучше, какие хуже? На этот вопрос нельзя ответить, если не знать, зачем инварианты нужны. Первый — и самый очевидный — ответ на последний вопрос состоит в том, что инварианты — удобный способ различать графы. Если один и тот же инвариант принимает разные значения на двух графах, то эти графы неизоморфны. Вообще, проблема изоморфизма графов — сложная с вычислительной точки зрения задача. Разумеется, изоморфизм двух графов можно проверить, отождествляя попарно всеми возможными способами вершины этих графов, однако этот алгоритм суперэкспоненциален по числу вершин. Алгоритмы, обеспечивающие полиномиальную сложность в наихудшем случае, неизвестны. Такая постановка вопроса приводит к следующим естественным требованиям к инварианту:

- инвариант должен быть легко вычислимым (скажем, за полиномиальное по числу вершин время);
- инвариант должен различать как можно больше неизоморфных графов;

и соответствующим «критериям качества»: один инвариант лучше другого, если он

- быстрее вычисляется;
- различает больше графов.

К сожалению, первое требование трудно выполнимо. Второе же допускает дальнейшую формализацию, и мы не раз к нему вернемся.

8.2 Хроматический многочлен

Рассмотрим теперь важный и нетривиальный пример инварианта. Пусть c — натуральное число. Обозначим через $\chi_G(c)$ число правильных раскрасок вершин графа G в c цветов. Это функция от переменной c , и мы будем называть ее *хроматической функцией* графа G . Под *правильной раскраской* мы понимаем сопоставление цвета каждой вершине графа таким образом,



Рис. 8.1: Две различные раскраски двухточечного графа без ребер

Рис. 8.2: Граф-цепочка A_n

что любые две соседние (т.е. соединенные ребром) вершины окрашены в различные цвета.

Например, вершины графа допускают правильную раскраску в один цвет ($c = 1$) в том и только в том случае, если в графе нет ребер, т.е. он состоит из n не связанных между собою вершин. Заметим, что в этом случае мы можем красить каждую вершину произвольно в любой из c цветов — раскраска все равно будет правильной, а значит, $\chi_\Gamma(c) = c^n$. Обратите внимание на то, что две раскраски вершин двухточечного графа, изображенные на рис. 8.1, мы считаем *различными*. Другими словами, зафиксировав граф Γ , мы помечаем его вершины и считаем различными любые две раскраски, в которых одна и та же вершина окрашена в различные цвета.

Для графа из двух вершин, соединенных ребром, имеем $\chi_\Gamma(c) = c(c - 1)$. Действительно, если мы окрасим первую вершину в один из c цветов, то для окраски второй вершины мы можем использовать один из оставшихся $c - 1$ цветов. Аналогично, для графа-треугольника (трех вершин, попарно соединенных ребрами) $\chi_\Gamma(c) = c(c - 1)(c - 2)$. Эти утверждения несложно обобщить на некоторые графы с большим числом вершин.

Утверждение 8.2.1. (i) Справедливо равенство

$$\chi_{K_n}(c) = c(c - 1)(c - 2) \dots (c - n + 1) = (c)_n,$$

где K_n — полный граф на n вершинах, т.е. граф, в котором все вершины соединены ребрами попарно.

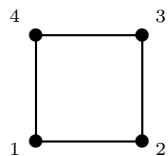
(ii) Справедливо равенство

$$\chi_{A_n}(c) = c(c - 1)^{n-1},$$

где A_n — цепочка на n вершинах (см. рис. 8.2).

Напомним, что через $(c)_n$ мы обозначаем нисходящий факториал аргумента c .

Прежде, чем переходить к общему анализу функции $\chi_\Gamma(c)$, заметим, что если граф Γ представляется в виде несвязного объединения двух графов

Рис. 8.3: Граф C_4 с занумерованными вершинами

$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$, то $\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma_1}(c)\chi_{\Gamma_2}(c)$. Это очень важное свойство, и мы остановимся на нем подробнее.

Несвязное объединение двух графов — это граф, множество вершин и множество ребер которого являются несвязным объединением множеств вершин и ребер этих графов. Множество компонент связности несвязного объединения двух графов является несвязным объединением множеств их компонент связности. То, что хроматическая функция несвязного объединения двух графов является произведением хроматических функций этих графов, очевидно: правильная раскраска каждого из графов автоматически дает правильную раскраску их объединения. В дальнейшем нас очень часто будут интересовать именно такие инварианты графов, значения которых на несвязных объединениях графов равны произведению значений на каждом из объединяемых графов. Заметим, что значение такого инварианта на *пустом* графе следует полагать равным 1.

Вычислим теперь хроматическую функцию для несколько менее тривиального примера — циклического графа C_n (n -угольника). Начнем с графа C_4 (квадрата). Занумеруем его вершины в циклическом порядке (см. рис. 8.3) и будем раскрашивать их последовательно. Первую вершину можно раскрасить в c цветов. Вторую — в $c - 1$ цветов. Третью — тоже в $c - 1$ цветов: ее цвет должен отличаться от цвета второй вершины. С четвертой вершиной дело обстоит сложнее. Ее цвет должен отличаться и от цвета третьей, и от цвета первой вершины. Разделим всевозможные окраски четвертой вершины в цвет, отличный от цвета третьей вершины, на две группы: те, в которых цвет четвертой вершины отличен от цвета первой, и те, в которых эти два цвета совпадают. Первая группа дает правильные раскраски квадрата, а вторая — правильные раскраски треугольника. Действительно, если первая и четвертая вершина покрашены в один и тот же цвет, то мы можем склеить их в одну, получив из квадрата треугольник. Тем самым, мы доказали равенство

$$\chi_{C_4}(c) = \chi_{A_4}(c) - \chi_{C_3}(c) = c(c-1)^3 - c(c-1)(c-2) = c(c-1)(c^2 - 3c + 3).$$

Здесь A_4 — цепочка на четырех вершинах, а $C_3 = K_3$ — треугольник.

На самом деле, в приведенном рассуждении нигде не использовалась структура цикла. Оно годится для произвольного графа. Пусть Γ — граф, $e \in E(\Gamma)$ — ребро в нем. Обозначим через Γ'_e граф Γ с выкинутым ребром e , а через Γ''_e — этот же граф, в котором ребро e стянуто в точку (и, следовательно, два конца ребра e стали новой вершиной нового графа, а

число вершин в нем на 1 меньше, чем в Γ). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.2.2. *Хроматическая функция удовлетворяет равенству*

$$\chi_{\Gamma}(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c) \quad (8.1)$$

для любого графа Γ и любого ребра e в нем.

Тем самым, хроматическую функцию графа можно вычислять последовательно: оба графа в правой части равенства (8.1) устроены проще, чем граф в его левой части. У первого из них меньше ребер, а у второго — меньше и вершин, и ребер. Заметим, однако, что сложность такого вычисления экспоненциальна: на каждом шаге мы получаем два графа вместо одного. Важно также отметить, что — несмотря на свободу выбора ребра на каждом шаге — результат вычисления, в силу инвариантности хроматической функции, не зависит от выбираемых ребер.

Замечание 8.2.3. Хроматическую функцию можно определить также и для графов, содержащих петли и кратные ребра. При этом для графа с петлями она оказывается тождественно равной нулю (поскольку у таких графов правильные раскраски вершин отсутствуют). Хроматическая функция графа с кратными ребрами совпадает с хроматической функцией того же графа, в котором каждое кратное ребро заменено обычным однократным ребром. Такое определение согласуется с теоремой 8.2.2. Действительно, если в графе есть кратные ребра, то, выбирая любое из этих ребер в качестве ребра e и применяя к нему формулу (8.1), мы получаем в правой части формулы тот же граф, в котором кратность ребра уменьшилась на 1, а также граф с петлей, хроматическая функция для которого равна нулю.

Во всех просчитанных нами примерах хроматическая функция оказывается многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1. Теорема 8.2.2 позволяет распространить это утверждение на произвольные графы.

Следствие 8.2.4. *Хроматическая функция любого графа является многочленом, степень которого равна числу вершин в графе, а старший коэффициент равен 1.*

Действительно, хроматическая функция графа на n вершинах, не имеющего ребер, равна c^n , что составляет базу индукции. Теорема 8.2.2 обеспечивает шаг индукции: согласно предположению индукции хроматический многочлен графа Γ'_e это многочлен степени n со старшим коэффициентом 1, а хроматический многочлен графа Γ''_e это многочлен степени $n - 1$. Их разность является многочленом степени n со старшим коэффициентом 1.

8.3 Немного о топологии графа

Граф — одномерный объект, поэтому его топология довольно проста. Однако она не совсем пуста. Разумеется, в первую очередь интерес представляет

топология связных графов.

Набор ребер в графе Γ называется *эйлеровым подграфом*, если валентность всех вершин этого подграфа четна. Например, в треугольнике C_3 есть два эйлеровых подграфа: пустой набор ребер и набор, состоящий из всех трех ребер.

Заметим, что всякий эйлеров подграф разбивается в объединение циклов, не имеющих общих ребер. Действительно, возьмем какой-нибудь цикл, содержащийся в данном эйлеровом подграфе. Такой цикл всегда существует (докажите!). Выкинув ребра, входящие в выбранный цикл, мы снова получаем эйлеров подграф, поскольку количество ребер, проходящих через каждую вершину, остается четным.

Множество $\mathcal{C}(\Gamma)$ всех эйлеровых подграфов в графе Γ образует векторное подпространство в пространстве $\mathbb{Z}_2^{|\mathcal{E}(\Gamma)|}$, натянутом на все ребра.

Действительно, рассмотрим два эйлеровых подграфа и произвольную вершину графа. В сумме над \mathbb{Z}_2 этих эйлеровых подграфов ребра, проходящие через выбранную вершину, аннигилируются попарно. Поэтому число неаннигилировавших ребер четно. Размерность векторного пространства эйлеровых циклов в графе Γ обозначается $b_1(\Gamma)$ и называется *первым числом Бетти*, или *цикломатическим числом*.

Ученым языком, это число равно числу образующих в первой группе гомологий графа. Число компонент связности в графе называют также *нулевым числом Бетти*; оно обозначается через $b_0(\Gamma)$. Это — число образующих нулевой группы гомологий.

Теорема 8.3.1 (Эйлер). *Первое число Бетти связного графа равно*

$$b_1(\Gamma) = |\mathcal{E}(\Gamma)| - |\mathcal{V}(\Gamma)| + 1.$$

Это утверждение можно считать определением цикломатического числа. Первое число Бетти графа, очевидно, является инвариантом графа.

Для доказательства теоремы Эйлера заметим, во-первых, что если граф Γ — дерево, то величины слева и справа от знака равенства равны 0. Действительно, непустых эйлеровых подграфов в дереве нет, а число ребер в нем больше числа вершин на 1.

Пусть теперь теорема Эйлера доказана для всех связных графов с цикломатическим числом k . Возьмем граф Γ , в котором $|\mathcal{E}(\Gamma)| - |\mathcal{V}(\Gamma)| + 1 = k + 1$. Выкинув из него произвольное ребро e , стирание которого не нарушает связности графа, мы получим граф с цикломатическим числом k . Рассмотрим в $\mathcal{C}(\Gamma)$ подпространство эйлеровых подграфов, не содержащих ребро e . Это подпространство совпадает с пространством $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$ эйлеровых подграфов в графе Γ'_e , поэтому его размерность равна k .

С другой стороны, поскольку выкидывание ребра e не нарушает связности графа Γ , через e проходит хотя бы один цикл, а значит, e содержится хотя бы в одном эйлеровом подграфе. Сумма над \mathbb{Z}_2 любых двух таких эйлеровых подграфов не содержит e , следовательно, лежит в $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$. Тем самым, пространство $\mathcal{C}(\Gamma)$ является прямой суммой пространств $\mathcal{C}(\Gamma'_e)$ и

одномерного векторного пространства, натянутого на произвольный вектор, содержащий ребро e . Поэтому его размерность равна $k + 1$, и теорема Эйлера доказана.

8.4 Многочлен Пенроуза

Вот еще один, по-видимому, чрезвычайно важный, инвариант графов. Нас будут интересовать подмножества в множестве $E(\Gamma)$ всех ребер графа Γ . Такое подмножество можно считать вектором в векторном пространстве над полем \mathbb{Z}_2 , порожденном этими ребрами, т.е. в векторном пространстве $\mathbb{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$. Координата этого вектора, соответствующая ребру e , равна нулю, если ребро e не входит в подмножество, и равна 1 в противном случае.

Если множество $V(\Gamma)$ вершин графа Γ разбито на два непересекающихся подмножества $V(\Gamma) = V_1 \sqcup V_2$, то подмножество всех ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 , называется *коциклом* в Γ . В C_3 коциклы — это пустое подмножество ребер, а также все пары ребер. Обозначим через $\mathcal{K}(\Gamma)$ множество всех коциклов.

В пространстве $\mathbb{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$ есть невырожденное скалярное произведение со значениями в \mathbb{Z}_2 : скалярное произведение двух наборов ребер равно четности числа элементов в пересечении этих наборов.

Теорема 8.4.1 (Veblen, 1912). *Множество $\mathcal{K}(\Gamma)$ является векторным подпространством в $\mathbb{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$, ортогональным $\mathcal{C}(\Gamma)$ относительно этого скалярного произведения:*

$$\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{K}^\perp(\Gamma), \quad \mathcal{C}^\perp(\Gamma) = \mathcal{K}(\Gamma).$$

Для доказательства теоремы Веблена заметим, во-первых, что любой коцикл пересекается с любым эйлеровым подграфом по четному числу ребер. Действительно, пусть коцикл сопоставлен разбиению множества вершин графа на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 . Разобьем эйлеров подграф в объединение циклов, не имеющих общих ребер. Покрасим вершины эйлерова подграфа в два цвета, 1 и 2, в зависимости от того, какому из множеств, V_1 или V_2 , они принадлежат. Тогда в каждом цикле число ребер, соединяющих вершины разных цветов, четно. Поэтому четно и число таких ребер в эйлеровом подграфе, а значит, скалярное произведение эйлерова подграфа и коцикла равно нулю.

Количество способов, которыми множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, равно $2^{|V(\Gamma)|-1}$. Поэтому множество всех коциклов состоит из $2^{|V(\Gamma)|-1}$ элементов. С другой стороны, согласно формуле Эйлера, подпространство, ортогональное пространству эйлеровых подграфов, имеет размерность $|V(\Gamma)| - 1$. Поскольку оно содержит множество всех коциклов, оно просто совпадает с ним. Теорема Веблена доказана.

Например, как мы видели, размерность пространства циклов в C_3 равна 1, а размерность пространства коциклов равна 2. Сумма этих размерностей равна 3 — числу ребер в C_3 .

Замечание 8.4.2. Не следует думать, что пространство $\mathbb{Z}_2^{|E(\Gamma)|}$ является прямой суммой подпространства эйлеровых подграфов и подпространства коциклов. Например, для графа C_4 — цикла на четырех вершинах — сумма всех ребер является одновременно циклом и коциклом. Поэтому подпространство эйлеровых подграфов, состоящее из пустого множества ребер и суммы всех ребер, лежит в пространстве коциклов.

Для подмножества $E' \subset E(\Gamma)$ множества ребер в Γ рассмотрим подпространство

$$B_\Gamma(E') = \{\mathcal{C} \in \mathcal{C}(\Gamma), \mathcal{C} \cap E' \in \mathcal{K}(\Gamma)\} \subset \mathbb{Z}_2^{|E(\Gamma)|}.$$

Многочленом Пенроуза графа Γ называется многочлен от одной переменной, которую принято обозначать λ ,

$$P_\Gamma(\lambda) = \lambda \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (-1)^{|E'|} \lambda^{\dim B_\Gamma(E')}.$$

8.5 Соотношения Татта

Мы показали, что хроматический многочлен графа $\chi_\Gamma(c)$ удовлетворяет соотношению

$$\chi_\Gamma(c) = \chi_{\Gamma'_e}(c) - \chi_{\Gamma''_e}(c)$$

для любого ребра e в графе Γ . Однако хроматический многочлен — не единственный инвариант графов, удовлетворяющий такому соотношению. Татт называет *W-функцией* всякий инвариант графов f , удовлетворяющий соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma'_e) + f(\Gamma''_e) \quad (8.2)$$

для любого графа Γ и любого ребра e в нем. Изменение знака $-$ на $+$ не играет существенной роли: хроматический многочлен несложно модифицировать так, чтобы он удовлетворял соотношению (8.2). Для этого достаточно умножить его на $(-1)^{|V(\Gamma)|}$, где $|V(\Gamma)|$ — число вершин в Γ , т.е. рассмотреть модифицированный хроматический многочлен $\tilde{\chi}_\Gamma(c) = (-1)^{|V(\Gamma)|} \chi_\Gamma(c)$. Мы будем называть равенство (8.2) *соотношением Татта*.

Соотношение Татта мы будем рассматривать для графов с петлями и кратными ребрами. При этом в качестве ребра e можно брать только *звено* — ребро, не являющееся петлей. Как мы уже отмечали, хроматический многочлен можно определить и для таких графов, причем для выбранного продолжения соотношения (8.2) продолжают выполняться.

Помимо соотношений Татта хроматический многочлен удовлетворяет еще соотношению

$$f(\Gamma) = f(\Gamma_1)f(\Gamma_2) \quad (8.3)$$

в случае, если граф Γ является несвязным объединением графов Γ_1 и Γ_2 . Татт называет W -функции, удовлетворяющие соотношению (8.3), V -функциями, а мы будем называть их также *инвариантами Татта*. Для того, чтобы равенства (8.2) и (8.3) имели смысл, необходимо, чтобы в области значений инварианта f были определены сложение и умножение. Поэтому мы всегда будем предполагать, что эта область значений представляет собой некоторое фиксированное коммутативное кольцо K . В случае хроматического многочлена кольцо K является кольцом многочленов от одной переменной c , $K = \mathbb{Z}[c]$. Наша задача — доказать теорему Татта, дающую полное описание инвариантов Татта.

Пример 8.5.1 (сложность графа). Приведем еще один важный пример W -функции. *Остовным деревом* графа Γ называется поддерево в нем, содержащее все вершины графа Γ . *Сложностью* графа называется число остовных деревьев в нем. Обозначим сложность графа Γ через $S(\Gamma)$. Очевидно, что сложность несвязного графа равна нулю. Сложность графа удовлетворяет соотношению Татта. Действительно, все остовные деревья в графе Γ разбиваются на два класса: не содержащие данное ребро e и содержащие это ребро. Остовные деревья первого типа находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа Γ'_e , а остовные деревья второго типа — в естественном взаимно-однозначном соответствии с остовными деревьями графа Γ''_e .

8.6 Теорема Татта

Оба графа в правой части соотношения Татта «проще» графа в его левой части: в них меньше звеньев. Поэтому, применяя соотношение Татта последовательно, мы можем свести вычисление любой W -функции к ее вычислению на графах без звеньев. Такое вычисление можно понимать как замену любого графа формальной линейной комбинацией графов без звеньев с целыми неотрицательными коэффициентами.

Всякий граф без звеньев является несвязным объединением одновершинных графов с несколькими петлями. Поэтому для задания W -функции достаточно определить ее на таких графах. Для задания V -функции достаточно определить ее на одновершинных графах с произвольным количеством петель: на несвязных объединениях таких графов значение V -функции будет произведением ее значений на связных компонентах.

Пример 8.6.1. Хроматический многочлен однозначно определяется условиями (8.2), (8.3) и тем, что на одновершинном графе без петель он равен t , а на одновершинном графе с одной и более петлей он равен нулю.

Сложность графа однозначно определяется условием (8.2) и тем, что она равна 1 на любом одновершинном графе и 0 на несвязном объединении двух и более одновершинных графов.

Принципиальное значение поэтому имеет следующий вопрос: верно ли, что W -функция может принимать *любое* значение на несвязном объеди-

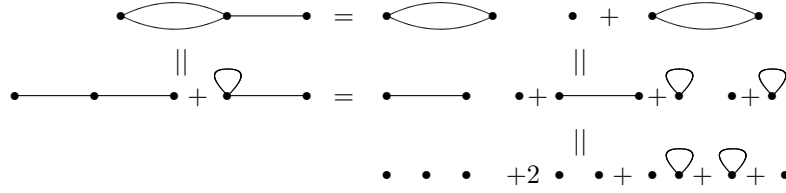


Рис. 8.4: Различные последовательности упрощения графа с помощью соотношений Татта

нении одновершинных графов (соответственно, верно ли что V -функция может принимать любое значение на одновершинных графах). Другими словами, последовательность упрощений графа с помощью соотношения Татта всегда приводит к линейной комбинации графов без звеньев. Однако таких последовательностей много — верно ли, что результат не зависит от выбранной последовательности?

Например, для графа на рис. 8.4 есть две различные возможности выбрать ребро, однако уже на следующем шаге мы с необходимостью приходим к равным линейным комбинациям графов. Верно ли, что так будет всегда? Теорема Татта дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 8.6.2 (Татт). *Для любого набора значений на графах без звеньев (соотв., на одновершинных графах) существует W -функция (соотв., V -функция), принимающая такие значения.*

Как мы уже видели раньше, такая функция единственна.

8.7 Доказательство теоремы Татта

В основе доказательства теоремы Татта лежит построение *универсальной* V -функции. Так мы называем V -функцию со значениями в кольце многочленов $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ от бесконечного числа переменных, такую, что любую другую V -функцию со значением в произвольном кольце K можно получить подстановкой вместо переменных s_i подходящих элементов кольца K . Заметим, что элементами кольца $\mathbb{Z}[s_0, s_1, \dots]$ являются конечные суммы мономов, представляющих собой конечные произведения переменных s_i с целыми коэффициентами.

Такую функцию можно построить следующим образом. Назовем *основным подграфом* графа всякий его подграф, содержащий все его вершины. Тем самым, у каждого графа Γ ровно $2^{|E(\Gamma)|}$ основных подграфа — по числу подмножеств в множестве ребер. Положим

$$U_\Gamma(s_0, s_1, \dots) = \sum_{E' \subset E(\Gamma)} s_0^{i_0(\Gamma(E'))} s_1^{i_1(\Gamma(E'))} \dots \tag{8.4}$$

В правой части формулы суммирование идет по всем подмножествам E' множества ребер $E(\Gamma)$; через $\Gamma(E')$ обозначен соответствующий остоновый

подграф, а $i_m(\Gamma(E'))$ — число связных компонент в $\Gamma(E')$ с цикломатическим числом i_m .

Лемма 8.7.1. *Функция U_Γ является инвариантом Татта.*

Прежде, чем доказывать лемму, посмотрим, что означает на практике вычисление функции U_Γ .

Пример 8.7.2. Пусть $\Gamma = C_3$ — граф-треугольник. Тогда у него $2^3 = 8$ остовных подграфов. Подграф с пустым множеством ребер содержит три компоненты, каждая с цикломатическим числом 0, поэтому его вклад в функцию U_{C_3} равен s_0^3 . Каждый из трех подграфов с одним ребром содержит две компоненты, обе с цикломатическим числом 0. Их общий вклад равен поэтому $3s_0^2$. Аналогично, вклад трех двухреберных подграфов равен $3s_0$. Наконец, сам граф C_3 состоит из одной компоненты связности с цикломатическим числом 1, поэтому его вклад равен s_1 . Таким образом,

$$U_{C_3} = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1.$$

Доказательство леммы 8.7.1 Фиксируем граф Γ и звено e в нем. Остовные подграфы графа Γ , не содержащие ребро e , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа Γ'_e . При этом соответствии подграфы изоморфны, а значит соответствующие им значения i_0, i_1, \dots совпадают. С другой стороны, остовные подграфы графа Γ , содержащие ребро e , находятся во взаимно однозначном соответствии с остовными подграфами графа Γ''_e . При этом соответствии в каждом остовном подграфе в Γ''_e сжимается одно ребро, что не меняет набора цикломатических чисел его связных компонент. Лемма доказана.

Покажем теперь, что придавая различные значения переменным s_i , мы можем превратить U в V -функцию с любыми наперед заданными значениями на одновершинных графах без ребер. Обозначим одновершинный граф с n петлями через X_n . Выпишем значения функции U на X_n . Имеем

$$U(X_0) = s_0, \quad U(X_1) = s_0 + s_1, \quad U(X_2) = s_0 + 2s_1 + s_2;$$

вообще

$$U(X_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_j.$$

Действительно, в графе X_n имеется 2^n остовных подграфов — по числу подмножеств в множестве петель. Все эти подграфы связны. Число остовных подграфов из k петель равно $\binom{n}{k}$, и его цикломатическое число равно k .

Из этих равенств мы можем выразить s_i :

$$s_0 = U(X_0), \quad s_1 = U(X_1) - U(X_0), \quad \dots, \quad s_n = (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} U(X_j), \quad \dots$$

Тем самым, для произвольного набора значений $U(X_j) = t_j$, мы можем восстановить значения s_i , а значит и значение функции U на произвольном графе, положив

$$s_i = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} t_j.$$

Теорема Татта доказана.

Проверим проведенное выше вычисление значения функции U на графе C_3 . Последовательно применяя соотношения Татта, мы заключаем, что

$$C_3 = X_0^3 + 3X_0^2 + 2X_0 + X_1.$$

Отсюда

$$U_{C_3} = U_{X_0}^3 + 3U_{X_0}^2 + 2U_{X_0} + U_{X_1} = s_0^3 + 3s_0^2 + 2s_0 + s_1 + s_0 = s_0^3 + 3s_0^2 + 3s_0 + s_1$$

в согласии с нашими предыдущими вычислениями.

8.8 Новые примеры инвариантов Татта

Результаты предыдущего раздела означают, что инвариант Татта можно задать, либо подставив произвольные значения вместо параметров s_i , либо указав значения инварианта на графах X_n , — любой из этих наборов значений однозначно выражается через другой. Вот, что получается при некоторых специальных подстановках.

Пример 8.8.1 (ребра). Если мы положим в универсальном инварианте U все $s_i = 1$, то получим V -функцию, принимающую на графе Γ значение $2^{|E(\Gamma)|}$.

Пример 8.8.2 (дихроматический многочлен и дихромат). Дихроматический многочлен $Q_\Gamma(t, z)$ зависит от двух переменных, и определяется подстановкой $s_k = tz^k$ в универсальный инвариант Татта. Как нетрудно видеть, значение дихроматического многочлена на графе X_n равно

$$Q_{X_n}(t, z) = t(1+z)^n,$$

и эти равенства также можно считать его определением.

Подстановка $t = -c$, $z = -1$ превращает дихроматический многочлен в хроматический.

Дихромат графа Γ определяется формулой

$$\chi_\Gamma(x, y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} Q_\Gamma(x-1, y-1),$$

или

$$\chi_\Gamma(x, y) = (x-1)^{-b_0(\Gamma)} \sum_{E' \subset E(\Gamma)} (x-1)^{b_0(E')} (y-1)^{b_1(E')}.$$

Пример 8.8.3 (потокковый многочлен). Подстановка $z = -m$, $t = -1$ превращает дихроматический многочлен в *потокковый*, который мы обозначим через $F_\Gamma(m)$:

$$F_\Gamma(m) = Q_\Gamma(-1, -m).$$

Объясним причину такого названия. Обозначим через \mathbb{Z}_m группу вычетов по модулю m . *Цепью* над \mathbb{Z}_m в графе Γ называется формальная линейная комбинация ребер графа Γ с коэффициентами из \mathbb{Z}_m . Ориентируем ребра графа Γ произвольным образом. Тогда *границей* цепи называется формальная линейная комбинация вершин графа Γ , в которой коэффициент при каждой вершине равен сумме коэффициентов цепи входящих в нее ребер минус сумма коэффициентов выходящих ребер. Цепь называется *циклом*, если у нее нулевая граница (т.е. коэффициенты границы при каждой вершине равны нулю). Понятие эйлерова подграфа совпадает с понятием цикла над \mathbb{Z}_2 . При этом выбор ориентации графа не важен, так как в группе \mathbb{Z}_2 всякий элемент совпадает со своим противоположным.

Например, граф из двух вершин, соединенных двумя ребрами, допускает две существенно различных ориентации. В обоих случаях цепи имеют вид $a_1e_1 + a_2e_2$, где символами e_1, e_2 обозначены (ориентированные) ребра графа, а $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$. Граница такой цепи равна сумме вершин, взятых с коэффициентами $a_1 + a_2, -(a_1 + a_2)$ в случае, если ребра ориентированы одинаково, и с коэффициентами $a_1 - a_2, a_2 - a_1$, если ориентации ребер противоположны. Если оба ребра ориентированы одинаково, то циклы имеют вид $ae_1 - ae_2$, а если ориентация ребер противоположна, то циклы имеют вид $ae_1 + ae_2$.

Утверждение 8.8.4. Значение многочлена $F_\Gamma(m)$ при целом $m \geq 2$ равно числу всюду ненулевых циклов над \mathbb{Z}_m в произвольной ориентации ребер графа Γ , умноженному на $(-1)^{b_1(\Gamma)+1}$.

Всюду ненулевой цикл можно понимать как «поток» в графе, а его коэффициенты при ребрах как «величину тока» вдоль направления этого ребра, что и объясняет название инварианта. При этом суммарный поток через любую вершину равен нулю, т.е. вершина не является ни источником, ни стоком.

Для доказательства утверждения заметим прежде всего, что число всюду ненулевых циклов не зависит от выбора ориентации графа: чтобы превратить цикл в некоторой ориентации в цикл относительно другой ориентации, отличающейся от первой ориентацией некоторых ребер, достаточно поменять коэффициенты при этих ребрах на противоположные. Ясно, что такая операция задает взаимно-однозначное отображение, как на множествах циклов, так и на множествах всюду ненулевых циклов.

Проверим теперь, что число всюду ненулевых циклов над \mathbb{Z}_m , умноженное на $(-1)^{b_1(\Gamma)}$ является V -функцией. Мультипликативность числа всюду ненулевых циклов очевидна. Умножение на $(-1)^{b_1(\Gamma)}$ не меняет этого свойства, поскольку при несвязном объединении графов их цикломатические числа складываются.

Фиксируем граф Γ , ориентацию в нем и ребро $e \in \Gamma$. Для проверки соотношения Татта заметим, что всякому всюду ненулевому циклу в графе Γ'_e можно сопоставить цикл в графе Γ . Действительно, рассмотрим цепь в Γ , отвечающую выбранному циклу в Γ'_e , и достроим ее до цикла. Для этого нужно приписать ребру e в Γ коэффициент, равный, с точностью до знака, значению коэффициента границы рассматриваемой цепи в любой из вершин, инцидентных ребру e . Эти два значения отличаются знаком, и выбранный коэффициент зависит от выбранного направления ребра e . Может случиться, однако, что построенный таким образом коэффициент равен нулю. Такое происходит в том и только в том случае, когда цикл в Γ'_e задает цикл в Γ'_e . Тем самым, число всюду ненулевых циклов в Γ равно разности числа всюду ненулевых циклов в Γ''_e и Γ'_e . Цикломатические числа графов Γ и Γ''_e совпадают, а цикломатическое число графа Γ'_e меньше их на единицу. Поэтому после умножения числа всюду ненулевых циклов на $(-1)^{b_1(\Gamma)}$ получаем функцию, удовлетворяющую соотношению Татта.

Осталось проверить ее совпадение с функцией F на графах X_n . Но мы знаем, что

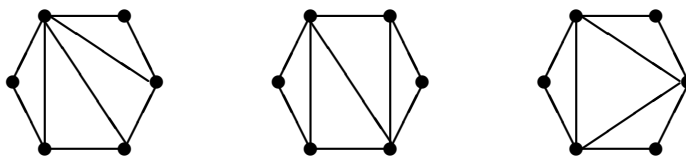
$$F_{X_n}(m) = -(1-m)^n,$$

что после умножения на $(-1)^{b_1(V(\Gamma))+1} = (-1)^{n+1}$ в точности равно $(m-1)^n$ — числу всюду ненулевых циклов в X_n над \mathbb{Z}_m (поскольку любая расстановка ненулевых элементов группы \mathbb{Z}_m на петлях графа X_n является циклом), что и требовалось.

Пример 8.8.5 (эйлеровость). Вот V -функция со значениями в \mathbb{Z}_2 , выделяющая эйлеровы графы (напомним, граф называется *эйлеровым*, если у всех его вершин четные валентности). Положим значение V -функции ε равным 1 на всех графах X_n . Тогда значение такой функции на произвольном эйлеровом графе Γ равно 1, а на неэйлеровом графе — нулю.

Для доказательства последнего утверждения достаточно проверить, что такая функция удовлетворяет соотношению Татта. Эйлеровость графа является *топологической* характеристикой — она не меняется при стягивании ребра. Поэтому если граф Γ эйлеров, то граф Γ''_e тоже эйлеров для любого ребра $e \in E(\Gamma)$, а граф Γ'_e неэйлеров — в нем валентности двух вершин меняются на 1. Если же граф Γ неэйлеров, причем в нем есть вершина нечетной валентности не на концах ребра e , то и оба графа Γ'_e и Γ''_e неэйлеровы. Если же нечетную валентность имеют лишь оба конца ребра e , то оба графа Γ'_e и Γ''_e эйлеровы. Во всех этих случаях

$$\varepsilon(\Gamma) = \varepsilon(\Gamma'_e) + \varepsilon(\Gamma''_e).$$

Рис. 8.5: Различные триангуляции цикла C_6

8.9 Задачи

Задача 8.1. Рассуждая по индукции, найдите $\chi_{C_n}(c)$ для произвольного цикла длины n .

Задача 8.2. Пользуясь теоремой 8.2.2, подсчитайте значения хроматической функции для а) деревьев на n вершинах; б) триангуляций (т.е. циклов, в которых проведены «попарно непересекающиеся диагонали», разбивающие их на треугольники, см. рис. 8.5. Покажите, в частности, что хроматическая функция одинакова для всех деревьев и для всех триангуляций на данном числе вершин, а значит, не различает попарно неизоморфные графы этих типов.

Задача 8.3. Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена $\chi_\Gamma(c)$ графа Γ с n вершинами (коэффициент при c^{n-1}) равен числу ребер в Γ , взятому со знаком минус.

Задача 8.4. Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются — коэффициент при c^k имеет знак $(-1)^{n-k}$ или равен нулю.

Задача 8.5. *Ориентацией* графа называется выбор направлений ребер в нем. Ориентация называется *ациклической*, если в графе отсутствуют циклы, идущие в направлении ориентированных ребер. Докажите, что число ациклических ориентаций графа равно $|\chi_\Gamma(-1)|$ — модулю значения хроматического многочлена в точке -1 . Проверьте, что это утверждение распространяется и на графы с кратными ребрами и петлями.

Например, для графа $A_2 = K_2$ имеем $\chi_{A_2}(-1) = 2$, и действительно, обе возможные ориентации отрезка являются ациклическими. В свою очередь, $\chi_{K_3}(-1) = -6$, и из восьми возможных ориентаций треугольника ровно две не являются ациклическими. Для доказательства воспользуйтесь тем, что количество ациклических ориентаций удовлетворяет соотношению Татта (предварительно доказав этот факт).

Задача 8.6. Подсчитайте первое число Бетти а) для деревьев; б) для циклов C_n ; в) для полных графов K_n ; г) для триангуляций.

Задача 8.7. Вычислите многочлен Пенроуза для графа C_3 и для других графов с не более, чем 4 вершинами.

Задача 8.8. Докажите, что если в связном графе есть *перешеек* (ребро, при выкидывании которого граф становится несвязным), то многочлен Пенроуза такого графа равен нулю.

Задача 8.9. Вычислите сложность графов, принадлежащих к изучавшимся нами ранее типам. Какова сложность графа с цикломатическим числом 1, содержащего единственный простой цикл длины n ?

Задача 8.10. Проверьте, что сложность графа не меняется при удалении из него и добавлении к нему петель.

Задача 8.11. Понятие цикла над группой \mathbb{Z}_m можно обобщить на произвольные абелевы группы. Докажите, что потоковый многочлен перечисляет не только всюду ненулевые циклы над \mathbb{Z}_m , но и всюду ненулевые циклы над произвольной абелевой группой с m элементами.

Задача 8.12. Остовный подграф графа Γ на $2n$ вершинах называется *совершенным паросочетанием*, или *1-фактором*, если он состоит из n ребер без общих концов. Например, в квадрате C_4 два совершенных паросочетания, а в полном графе K_4 их три. Рассмотрим V -функцию, значение которой на графе X_n равно

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2}(3^n + 1).$$

Докажите, что значение этой V -функции на всяком *кубическом* графе (т.е., на графе, валентности всех вершин которого равны трем) равно числу совершенных паросочетаний в нем.

Проверим это утверждение для кубического графа K_4 — полного графа на четырех вершинах. Значение универсального инварианта U на таком графе равно

$$U_{K_4} = s_0^4 + 6s_0^3 + 15s_0^2 + 4s_0s_1 + 16s_0 + 15s_1 + 6s_2 + s_3.$$

Его несложно вычислить благодаря высокой степени симметрии графа K_4 . Например, в множестве его ребер имеется $\binom{6}{3} = 20$ трехреберных подмножеств. Четыре из соответствующих остовных подграфов составляют треугольник C_3 , объединенный с отдельной вершиной, остальные 16 состоят из трех компонент связности с цикломатическим числом 0. Таким образом, вклад трехреберных подграфов в универсальный инвариант равен $4s_0s_1 + 16s_0^3$. Вычисление остальных слагаемых еще проще.

Воспользовавшись выражениями для s_n

$$\begin{aligned} s_0 &= t_0, & s_1 &= t_1 - t_0, \\ s_2 &= t_2 - 2t_1 + t_0, & s_3 &= t_3 - 3t_2 + 3t_1 - t_0, \end{aligned}$$

через значения на базисных графах и известными значениями

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -5, \quad t_3 = 14,$$

получаем

$$s_0 = -1, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = -10, \quad s_3 = 36.$$

Подстановка этих значений в универсальный инвариант дает 3, что и требовалось.

Задача 8.13. Подсчитайте число совершенных паросочетаний в полных графах K_n .

Задача 8.14. Найдите все графы с шестью вершинами, имеющие 6 совершенных паросочетаний.

Задача 8.15. Составьте таблицу, в которой для всех связных графов с ≤ 5 вершинами указаны значения всех введенных выше инвариантов графов.