

## Часть II

# Графы, их перечисление и инварианты



## Глава 7

# Перечисление деревьев и числа Гурвица

Мы уже обращались к графам, подсчитывая число путей в них. В этой части мы более внимательно посмотрим на сами графы. Начнем с подсчета помеченных деревьев.

### 7.1 Перечисление помеченных деревьев

Ряд трудностей в задачах перечисления обязан своим происхождением тому, что перечисляемые объекты имеют различные *симметрии*. Так, например, если бы мы решили считать одинаковыми диагональные триангуляции правильных многоугольников (см. раздел 3.3), переходящие друг в друга при повороте, получение точной формулы превратилось бы в сложную задачу, да и сама формула вряд ли значительно продвинула нас в понимании природы триангуляций. Причина такого явления кроется в том, что различные триангуляции допускают различные группы симметрий. Все шесть поворотов триангуляции шестиугольника, изображенной на рис. 7.1 а) дают различный результат, в то время как повороты триангуляции, приведенной на рис. 7.1 б), приводят лишь еще к двум новым триангуляциям, а на рис. 7.1 в) — к одной.

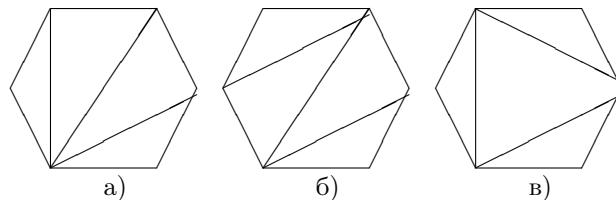


Рис. 7.1: Три диагональные триангуляции шестиугольника с различными симметриями

В то же время явная формула, сводящая число диагональных триангуляций многоугольника с *перенумерованными вершинами* к числу Каталана, дает хорошую оценку на асимптотику числа триангуляций многоугольника с *ненумерованными* вершинами. Действительно, число триангуляций, рассматриваемых с точностью до поворота  $(n + 2)$ -угольника, не превосходит  $c_n \sim \text{const} \cdot 4^n \cdot n^{-\frac{3}{2}}$ , и оно не меньше, чем  $c_n/(n + 2) \sim \text{const} \cdot 4^n \cdot n^{-\frac{5}{2}}$ . Таким образом нарушение симметрии — перенумерация вершин многоугольника — привело к серьезному упрощению задачи и лишь незначительно повлияло на точность ответа. Тот же прием — маркировка — оказывается весьма эффективным и во многих других перечислительных задачах. Мы увидим сейчас, как он используется при перечислении деревьев.

В главе 3 мы уже вводили определение графа. Сейчас мы сделаем его более формальным.

**Определение 7.1.1.** *Графом* будем называть тройку  $\Gamma = \{V, E, I\}$ , состоящую из конечного множества *вершин*  $V$ , конечного множества *ребер*  $E$  и отображения *инцидентности*  $I : E \rightarrow V \times V$ , сопоставляющего каждому ребру пару вершин (*концы ребра*), которые это ребро соединяет. Ребро называется *петлей*, если его концы совпадают. *Валентностью* вершины графа называется число ребер, для которых данная вершина является концом (при подсчете валентности петля считается за два ребра).

Граф удобно изображать на плоскости; вершинам графа соответствуют точки на плоскости, ребрам — отрезки дуг, соединяющие эти точки (см. рис. 7.2).

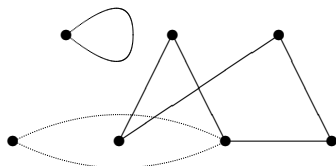


Рис. 7.2: Изображение графа на плоскости. Жирными точками обозначены вершины графа (их 7), отрезками и дугами — его ребра (их 8). Не выделенные точки пересечения ребер не являются вершинами

**Замечание 7.1.2.** 1. На самом деле, графом естественно считать не определенный выше объект, а класс эквивалентности таких объектов. Два графа  $\Gamma_1 = \{V_1, E_1, I_1\}$  и  $\Gamma_2 = \{V_2, E_2, I_2\}$  называются *изоморфными*, если существуют взаимно однозначные отображения  $v : V_1 \rightarrow V_2$  и  $e : E_1 \rightarrow E_2$ , такие, что  $I_2 \circ e = (v \times v) \circ I_1$ . Другими словами, два графа изоморфны, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, при котором ребра переходят в ребра. В дальнейшем мы не будем различать изоморфные графы.

2. У приведенного определения имеются варианты. Например, иногда естественно требовать, чтобы через каждую пару вершин графа проходило не более одного ребра, т.е. чтобы отображение инцидентности

было инъективным. Иногда в графе запрещаются петли и т.д. Мы будем всякий раз оговаривать подобные ограничения.

3. С топологической точки зрения граф представляет собой *одномерный комплекс*. Если на каждом ребре графа ввести *ориентацию* (т.е. указать направление этого ребра), то *граница ребра* — это разность конечной и начальной вершин.

**Определение 7.1.3.** Две вершины графа называются *соседними*, или *смежными*, если существует ребро, которое их соединяет. Граф называется *связным*, если для любой пары  $u, v \in V$  его вершин существует последовательность  $v_0 = u, v_1, \dots, v_k = v \in V$  вершин графа, в которой вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$  соседние для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ . *Циклом* называется последовательность ребер  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , в которой все ребра попарно различны и для каждого  $i = 2, \dots, k - 1$  один из концов ребра  $e_i$  является концом ребра  $e_{i-1}$ , а другой — концом ребра  $e_{i+1}$ , и свободные концы ребер  $e_k$  и  $e_1$  также совпадают. *Деревом* называется связный граф без циклов. Цикл называется *простым*, если все вершины в нем попарно различны.

На рис. 7.3 приведены все деревья с  $n \leq 5$  вершинами.



Рис. 7.3: Деревья с  $n \leq 5$  вершинами

Задача перечисления деревьев с  $n$  вершинами — сложная перечислительная задача. Мы займемся более простой задачей — перечислением деревьев с помеченными вершинами. Сопоставим каждой вершине дерева одно из чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  так, чтобы разным вершинам соответствовали разные числа. На рис. 7.4 изображены все помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами. Последовательность чисел помеченных деревьев с  $n$  вершинами начинается так:  $1, 1, 3, 16, \dots$

**Теорема 7.1.4 (Кэли).** Число помеченных деревьев с  $n$  вершинами равно  $n^{n-2}$ .

Обозначим через  $T_n$  число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами, т.е. число помеченных деревьев, в которых одна из вершин выделена и названа *корнем*. Ясно, что число корневых помеченных деревьев с  $n$  вершинами в  $n$  раз больше числа помеченных деревьев с  $n$  вершинами: в качестве корня можно выбрать любую из  $n$  различных вершин. Поэтому из теоремы Кэли сразу же вытекает

**Следствие 7.1.5.** Число помеченных корневых деревьев с  $n$  вершинами есть  $T_n = n^{n-1}$ .

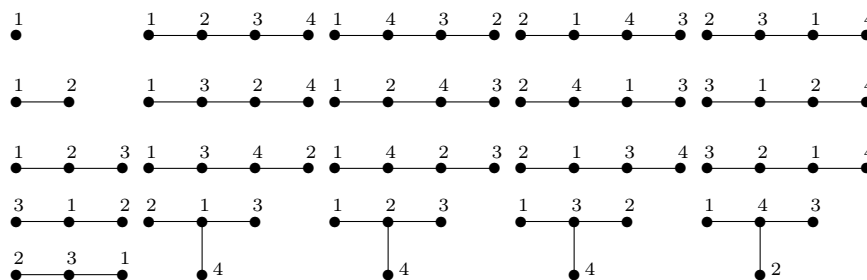


Рис. 7.4: Помеченные деревья с  $n \leq 4$  вершинами

Мы дадим два различных подсчета количества помеченных деревьев. Первое из них принадлежит Прюферу (1918 г.) и состоит в сопоставлении каждому дереву некоторого кода.

Возьмем какое-нибудь дерево с  $n$  вершинами, помеченными различными числами от 1 до  $n$ . Мы сопоставим дереву последовательность длины  $n - 2$  из букв  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Последовательность строится индуктивно. Возьмем в дереве лист с минимальным номером и возьмем в качестве первой буквы последовательности  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой этот лист соединен. Затем удалим выбранный лист. Второй буквой будет  $x$  с индексом, равным номеру вершины, с которой соединен минимальный лист в оставшемся дереве. Этот лист тоже удалим, и будем повторять эту операцию до тех пор, пока не останется дерево из двух вершин (ребро). Получим как раз последовательность букв длины  $n - 2$ .

На рис. 7.5 изображена последовательность удаления вершин в дереве с помеченными вершинами и соответствующая этому дереву последовательность букв — его код Прюфера.

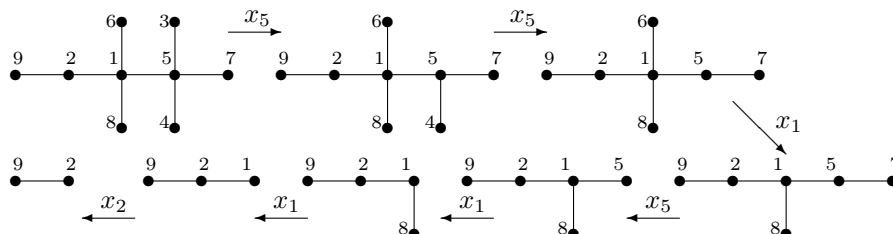


Рис. 7.5: Построение кода Прюфера помеченного дерева. Дерево на рисунке имеет код  $x_5x_5x_1x_5x_1x_1x_2 = x_5^2x_1x_5x_1^2x_2$

Наоборот, по любой последовательности букв длины  $n - 2$  можно восстановить помеченное дерево. Валентность любой вершины в этом дереве на 1 больше частоты, с которой переменная, индекс которой является номером этой вершины, встречается в последовательности. В частности, вершины, номера которых не встречаются в качестве индекса, — листья дерева. Взяв первый элемент последовательности, проведем ребро, соединяющее лист с

минимальным номером и вершину, в которой стоит индекс этого первого элемента. Затем первый элемент последовательности стираем и повторяем процедуру для новой последовательности (с учетом того, что один лист уже использован, а валентность вершины с номером, равным индексу первого элемента последовательности, уменьшилась на 1). Последнее ребро соединяет две вершины, валентности которых еще не заполнены.

Тем самым мы установили взаимно-однозначное соответствие между помеченными деревьями на  $n$  вершинах и упорядоченными мономами в разложении выражения  $(x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$ . В частности, подставляя значения  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , получаем формулу Кэли.

Второй подсчет числа помеченных деревьев требует рассмотрения производящей функции для этих чисел.

Попробуем найти экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} T_n s^n = \frac{1}{1!} s + \frac{2}{2!} s^2 + \frac{9}{3!} s^3 + \frac{64}{4!} s^4 + \dots$$

для числа корневых помеченных деревьев. Выкинем из дерева корень. Тогда оно распадется на несколько деревьев, число которых равно валентности корня. Новые деревья тоже можно считать помеченными: требуется лишь заменить пометки  $\{l_1, \dots, l_i\}$ ,  $l_1 < \dots < l_i$  на пометки  $\{1, \dots, i\}$ , сохраняя их относительный порядок. Корнем нового дерева будем считать вершину, соединенную с корнем исходного дерева. Тем самым каждому корневому помеченному дереву с корнем валентности  $k$  сопоставлено (мульти-)множество из  $k$  корневых помеченных деревьев. Мы говорим о мульти-множествах, так как среди вновь образованных деревьев могут встречаться одинаковые.

Из приведенного описания вытекает, что деревья с корнем валентности  $k$  перечисляются производящей функцией  $s\mathcal{T}^k(s)$ . Действительно, вклад в коэффициент при  $s^{n+1}$  в функции  $s\mathcal{T}^k(s)$  дают в точности элементы вида

$$\frac{\mathcal{T}^{l_1}}{l_1!} \dots \frac{\mathcal{T}^{l_k}}{l_k!} s^{l_1 + \dots + l_k},$$

для которых  $l_1 + \dots + l_k = n$ . Множество пометок  $n$  вершин  $k$  деревьев можно разбить на  $k$  подмножеств из  $l_1, \dots, l_k$  пометок  $\binom{n}{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!}$  способами. После того, как такое разбиение произведено, пометки на всех вершинах дерева с сохранением относительного порядка нумерации восстанавливаются однозначно. Поэтому число помеченных корневых деревьев на  $n+1$  вершинах с корнем валентности  $k$  равно

$$n! [s^n] \mathcal{T}^k(s) = \sum_{l_1 + \dots + l_k = n} \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \mathcal{T}_{l_1} \dots \mathcal{T}_{l_k}.$$

Суммируя функции  $\frac{1}{k!} \mathcal{T}^k$  по всем  $k$ , получаем следующее утверждение.

**Теорема 7.1.6.** Экспоненциальная производящая функция  $T(s)$  для числа помеченных корневых деревьев, перечисляющая их по числу вершин, удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$T(s) = se^{T(s)}. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) имеет единственное решение (докажите!) и позволяет последовательно вычислять коэффициенты функции  $T(s)$ . Можно, например, подсчитать, что  $T_5 = 625, T_6 = 7776$ . Для того, чтобы вывести из него теорему Кэли, достаточно проверить, что функция

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$$

является его решением. Полезно, однако, вывести ее, не предполагая ответ заранее известным. Для этого нам понадобится следующая

**Теорема 7.1.7 (Лагранж).** Пусть функции  $\varphi = \varphi(s), \varphi(0) = 0$  и  $\psi = \psi(t)$  связаны между собой уравнением Лагранжа

$$\varphi(s) = s\psi(\varphi(s)). \quad (7.2)$$

Тогда знание функции  $\varphi$  позволяет однозначно восстановить функцию  $\psi$  и наоборот, причем коэффициент при  $s^n$  в функции  $\varphi$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t).$$

Применим эту теорему к уравнению (7.1) на функцию  $\varphi(s) = T(s)$ . Здесь  $\psi(s) = e^s$ . Получим

$$T_n = n![s^n]T(s) = n! \frac{1}{n}[t^{n-1}]e^{nt} = (n-1)! \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1},$$

что и является требуемым результатом.

**Доказательство теоремы 7.1.7** Докажем сначала, что уравнение Лагранжа (7.2) относительно неизвестной функции  $\varphi$  имеет единственное решение. Доказательство носит стандартный характер: коэффициенты функции  $\varphi$  можно последовательно восстановить, зная коэффициенты функции  $\psi$  и уже подсчитанные коэффициенты функции  $\varphi$ . Действительно, пусть

$$\varphi(s) = f_1s + f_2s^2 + f_3s^3 + \dots, \quad f_1 \neq 0, \quad \psi(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots$$

Тогда уравнение (7.2) имеет вид

$$f_1s + f_2s^2 + \dots = p_0s + p_1s(f_1s + f_2s^2 + \dots) + p_2s(f_1s + f_2s^2 + \dots)^2 + \dots$$

Приравнивая последовательно коэффициенты при одинаковых степенях  $s$ , мы заключаем, что коэффициент  $f_1$  определяется из равенства  $f_1 = p_0$ ,



коэффициент  $f_2$  — из равенства  $f_2 = p_1 f_1$ , коэффициент  $f_3$  — из равенства  $f_3 = p_1 f_2 + p_2 f_1^2$  и т.д. Тем самым, мы можем найти все коэффициенты функции  $\varphi$ . Если же коэффициенты разложения функции  $\varphi$  известны и  $f_1 \neq 0$ , то те же самые уравнения позволяют последовательно найти все коэффициенты функции  $\psi$ .

Для вывода явного вида преобразования коэффициентов нам понадобится

**Лемма 7.1.8 (преобразование вычета при замене переменной).** Пусть функция  $g(t)$  такова, что  $g(0) = 0, g'(0) \neq 0$ . Тогда

$$[s^{-1}]f(s) = [t^{-1}]f(g(t))g'(t).$$

Действительно, пусть  $f(s) = f_{-N}s^{-N} + f_{-N+1}s^{-N+1} + \dots$ ,  $g(t) = g_1 t + g_2 t^2 + \dots$ . При  $n \neq -1$

$$[t^{-1}]g^n(t)g'(t) = [t^{-1}]\frac{1}{n+1}(g^{n+1}(t))' = 0,$$

так как вычет производной любой функции равен нулю. При  $n = -1$

$$[t^{-1}]f_{-1}\frac{1}{g(t)}g'(t) = f_{-1},$$

что и требовалось. □

Коэффициент при  $s^n$  в производящей функции  $\varphi$  равен

$$[s^n]\varphi(s) = [s^{-1}]s^{n+1}\varphi(s).$$

Вычислим последний вычет с помощью леммы 7.1.8. Для этого перепишем уравнение Лагранжа (7.2) в виде подстановки

$$s = \frac{t}{\psi(t)},$$

где  $t = \varphi(s)$ . Тогда, согласно лемме,

$$\begin{aligned} [s^{-1}]s^{-n-1}\varphi(s) &= [t^{-1}]\frac{\psi^{n+1}(t)}{t^n} \cdot \frac{\psi(t) - t\psi'(t)}{\psi^2(t)} = [t^{-1}]\left(\frac{\psi^n(t)}{t^n} - \frac{\psi^{n-1}(t)\psi'(t)}{t^{n-1}}\right) \\ &= [t^{n-1}]\psi^n(t) - \frac{1}{n}[t^{n-2}](\psi^n(t))' = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\psi^n(t). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы закончено. □

## 7.2 Леса и многочлены Абеля

Несвязное объединение деревьев называется лесом. Другими словами, лес это простой граф без циклов (в отличие от дерева, не обязательно связный). Каждый лес состоит из нескольких деревьев — своих компонент связности.

*Корневым лесом*, называется лес, в каждой компоненте которого выбран корень.

В предыдущем параграфе мы перечислили деревья и корневые деревья. Посмотрим теперь, как перечисление корневых лесов связано с многочленами Абеля  $A_n(x) = x(x+n)^{n-1}$ . Скажем, раскрыв скобки в многочлене Абеля  $A_3$ , получим

$$A_3(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

В то же время, существует единственный трехкомпонентный помеченный лес на трех вершинах, 6 двухкомпонентных помеченных лесов на трех вершинах и 9 однокомпонентных помеченных лесов (деревьев) на трех вершинах (проверьте!). Числа 1, 6 и 9 — коэффициенты многочлена  $A_3$ . То же самое верно и для любого многочлена  $A_n$ :

**Теорема 7.2.1.** *Коэффициент при  $x^k$  в многочлене  $A_n$  равен числу помеченных корневых лесов из  $k$  деревьев на  $n$  вершинах.*

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для многочленов Абеля

$$\mathcal{A}(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

Теорема будет доказана, если мы докажем следующее утверждение.

**Теорема 7.2.2.** *Экспоненциальная производящая функция  $\mathcal{A}$  для многочленов Абеля имеет вид*

$$\mathcal{A}(x, s) = e^{x\mathcal{T}(s)},$$

где  $\mathcal{T}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{s^n}{n!}$  есть экспоненциальная производящая функция для корневых деревьев на  $n$  вершинах.

Доказав это утверждение, мы заодно покажем, что последовательность многочленов Абеля биномиальна. Отметим, что свойство Лагранжа для функции  $\mathcal{T}$  означает, что  $\mathcal{A}(x, s) = (\mathcal{T}(s)/s)^x$ . Отметим также, что  $x\mathcal{T}(s)$  есть линейная часть по  $x$  функции  $\mathcal{A}(x, s)$ .

Для доказательства теоремы 7.2.2 мы введем обобщенные многочлены Абеля и рассмотрим экспоненциальную производящую функцию для них.

Мы будем пользоваться двумя дополнительными бесконечными сериями параметров  $t_1, t_2, t_3, \dots$  и  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . Пусть  $M \subset \mathbb{N}$  — конечное (быть может, пустое) подмножество множества натуральных чисел, и пусть  $|M|$  — количество элементов в  $M$ ,  $M = \{i_1, \dots, i_{|M|}\}$ . Положим

$$t_M = t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_{|M|}} = \sum_{i \in M} t_i; \quad \tau_M = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_{|M|}} = \prod_{i \in M} \tau_i.$$

Моном  $\tau_M$  полностью описывает множество  $M$ , и мы будем считать, что  $\tau_i^2 = 0$  для всех  $i$  (другими словами, все элементы множества различны). В частности

$$\tau_I \tau_J = \begin{cases} \tau_{I \cup J}, & \text{если } I \cap J = \emptyset \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Положим

$$A_M(x, t) = x(x + t_M)^{|M|-1}.$$

Ясно, что многочлен  $A_M(x, t)$  превращается в многочлен Абеля  $A_{|M|}(x)$  при подстановке  $t_1 = t_2 = \dots = 1$ .

Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, t, \tau) = \sum_{M \subset \mathbb{N}, |M| < \infty} A_M(x, t) \frac{\tau_M}{|M|!}.$$

Теперь теорема 7.2.2 вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 7.2.3.** *Справедливо равенство*

$$\tilde{\mathcal{A}}(x, t, \tau) = e^{x \sum t_M^{|M|-1} \tau_M}. \quad (7.3)$$

**Доказательство.** Сравнивая коэффициенты при  $x^k \tau_M$  в левой и правой частях равенства 7.3, приходим к необходимости проверить, что для любого  $k$ ,  $0 \leq k \leq |M|$ , выполняется равенство

$$\binom{|M|-1}{k-1} t_M^{|M|-k} = \sum t_{I_1}^{|I_1|-1} \dots t_{I_k}^{|I_k|-1},$$

где сумма в правой части берется по всем упорядоченным разбиениям множества  $M$  на  $k$  подмножеств. Коэффициент при  $t_{i_1}^{a_1} \dots t_{i_{|M|}}^{a_{|M|}}$  (где  $a_1 + \dots + a_{|M|} = |M| - k$  в левой части последнего равенства есть

$$\binom{|M|-1}{k-1} \frac{(|M|-k)!}{a_1! \dots a_{|M|}!}.$$

Коэффициент при том же мономе в правой части имеет вид

$$\sum \frac{(|I_1|-1)! \dots (|I_k|-1)!}{a_1! \dots a_{|M|}!}.$$

Тем самым, нам достаточно показать, что

$$\binom{|M|-1}{k-1} (|M|-k)! = \sum (|I_1|-1)! \dots (|I_k|-1)!$$

но это равенство, очевидным образом, имеет место: достаточно сравнить коэффициенты при мономе  $t_1^{|M|-k}$ . Доказательство равенства (7.3) завершено.

## 7.3 Графы и перестановки

Рассмотрим произвольный граф с  $n$  вершинами и занумеруем его вершины числами от 1 до  $n$ . Тогда каждому ребру этого графа можно сопоставить

транспозицию в группе перестановок  $\mathcal{S}_n$ . Эта транспозиция переставляет элементы, стоящие на концах выбранного ребра, оставляя остальные элементы на месте.

Нас будет интересовать произведение в группе  $\mathcal{S}_n$  транспозиций, отвечающих всем ребрам графа. Поскольку группа перестановок некоммутативна, произведение транспозиций зависит от порядка, в котором мы их берем. Чтобы задать этот порядок, необходимо в дополнение к нумерации вершин перенумеровать ребра графа. Например, для дерева с рис. 7.6 с занумерованными вершинами и ребрами произведение транспозиций

$$\tau_8 \circ \cdots \circ \tau_1 = (45)(15)(18)(12)(16)(29)(57)(35)$$

равно (697532148) т.е. является длинным циклом (циклом длины  $n = 9$ ) в группе перестановок  $\mathcal{S}_9$ :

$$1 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 1.$$

Оказывается, это общее свойство деревьев.

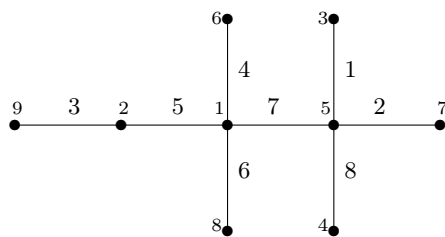


Рис. 7.6: Дерево с помеченными вершинами и занумерованными ребрами

**Теорема 7.3.1.** Пусть  $T$  — дерево на  $n$  вершинах с произвольной нумерацией вершин и ребер. Тогда произведение  $\tau_{n-1} \circ \cdots \circ \tau_1$  всех транспозиций, отвечающих ребрам дерева  $T$  в порядке их нумерации является длинным циклом в группе перестановок  $\mathcal{S}_n$ .

Прежде, чем доказывать теорему, отметим, что если ее утверждение справедливо при выбранной нумерации вершин дерева, то оно остается верным и при любой другой нумерации: перенумерация элементов множества  $N_n = \{1, \dots, n\}$  действует на любой перестановке этого множества сопряжением, а значит не меняет ее циклический тип.

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  — произвольная перестановка, а  $\tau_{ij} = (i, j) \in \mathcal{S}_n$  — транспозиция, меняющая местами элементы  $i, j \in N_n$ . Количество циклов в разложении произведения  $\sigma \circ \tau_{ij}$  в произведении независимых циклов зависит от того, входят ли элементы  $i$  и  $j$  в один цикл перестановки  $\tau$  или они входят в разные циклы. Если  $i$  и  $j$  входят в один цикл, то умножение на  $\tau_{ij}$  расщепляет этот цикл на два. Если же  $i$  и  $j$  принадлежат разным циклам, то умножение на  $\tau_{ij}$  склеивает эти два цикла в один.

Рассмотрим начальный отрезок  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  произведения транспозиций, отвечающий первым  $k$  ребрам дерева. Пусть  $\Theta_k$  — подграф в дереве  $\Theta$ , состоящий из всех вершин этого дерева и ребер с номерами  $1, \dots, k$ . Приведенное рассуждение показывает, что циклы в разложении перестановки  $\tau_k \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$  в произведение независимых циклов взаимно однозначно соответствуют компонентам связности графа  $\Theta_k$  — вершины каждой компоненты связности образуют один цикл. Добавление ребра с номером  $k+1$  приводит к тому, что два цикла, отвечающие компонентам связности, соединяемым этим ребром, склеиваются в один. При исчерпании всех ребер все компоненты склеиваются в одну компоненту связности, а циклы — в один длинный цикл. Теорема доказана.

Число  $n-1$  это минимальное число транспозиций, в произведение которых можно разложить цикл длины  $n$  (если в графе с  $n$  вершинами меньше  $n-1$  ребер, то он несвязен). Каждому разложению длинного цикла в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n-1$  транспозиций можно сопоставить дерево на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами — ребро с номером  $k$  соединяет вершины с номерами, переставляемыми транспозицией  $\tau_k$ . Этот граф действительно является деревом, поскольку число ребер в нем на единицу меньше числа вершин и он связан. Тем самым, мы установили взаимно-однозначное соответствие между деревьями на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами и ребрами и разложениями длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  в произведение  $n-1$  транспозиций.

Согласно теореме Кэли, число деревьев на  $n$  вершинах с занумерованными вершинами равно  $n^{n-2}$ . Есть  $(n-1)!$  различных нумераций ребер такого дерева. Поэтому имеется  $(n-1)!n^{n-2}$  последовательностей из  $n-1$  транспозиций в  $\mathcal{S}_n$ , произведение которых дает длинный цикл. В свою очередь, число длинных циклов в  $\mathcal{S}_n$  равно  $(n-1)!$ , что приводит к следующему утверждению.

**Теорема 7.3.2.** *Каждый длинный цикл в  $\mathcal{S}_n$  допускает  $n^{n-2}$  различных представлений в виде произведения  $n-1$  транспозиций.*

## 7.4 Числа Гурвица

Приведенное в предыдущем разделе вычисление является первым примером вычисления чисел Гурвица. Более общим образом, числа Гурвица подсчитывают количество разложений данной перестановки в произведение заданного количества перестановок предписанных циклических типов. В этом разделе мы обсудим различные варианты чисел Гурвица.

### 7.4.1 Простые и общие числа Гурвица

Всякую перестановку  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  можно разложить в произведение транспозиций, причем таких разложений существует много. Мы хотим для данного  $t$  подсчитать количество последовательностей  $\tau_1, \dots, \tau_m$  из  $t$  транспозиций,

произведение каторых равно данной перестановке  $\sigma$ ,

$$\sigma = \tau_m \circ \cdots \circ \tau_1.$$

Следующие утверждения очевидны:

- число таких представлений зависит лишь от циклического типа перестановки  $\sigma$  — оно одинаково для всех перестановок с данным циклическим типом;
- есть минимальное число  $m_{\min} = m_{\min}(\sigma)$ , для которого такое представление существует, и это минимальное число равно  $n - c(\sigma)$ , где  $c(\sigma)$  — количество независимых циклов в  $\sigma$ . Действительно, минимальное число транспозиций, произведение которых является циклом длины  $l$  равно  $l - 1$ ;
- все значения  $m$ , для которых число представлений отлично от нуля, имеют одну и ту же четность, совпадающую с четностью перестановки  $\sigma$ .

Теперь мы готовы дать определение простого числа Гурвица.

**Определение 7.4.1.** Пусть  $\mu$  — разбиение числа  $n$ ,  $\mu \vdash n$ . Простое число Гурвица  $h_{m;\mu}^\circ$  определяется равенством

$$h_{m;\mu}^\circ = \frac{1}{n!} |\{(\tau_1, \dots, \tau_m), \tau_i \in C_2(S_n) \mid \tau_m \circ \cdots \circ \tau_1 \in C_\mu(S_n)\}|.$$

Здесь через  $C_2(S_n)$  обозначено множество всех транспозиций в  $S_n$ , а  $C_\mu(S_n)$  — множество всех перестановок с циклическим типом  $\mu \vdash n$  в  $S_n$ ; в частности,  $C_2(S_n) = C_{1^{n-2}1}(S_n)$ . Связное простое число Гурвица  $h_{m;\mu}^\circ$  определяется аналогичным образом, но рассматриваются только такие наборы из  $m$  транспозиций, что порождаемая ими подгруппа  $\langle \tau_1, \dots, \tau_m \rangle \subset S_n$  действует на множестве  $N_n = \{1, \dots, n\}$  транзитивно.

Как мы знаем, любому набору транспозиций можно сопоставить граф с множеством вершин  $N_n$  и занумерованными ребрами. Простые числа Гурвица перечисляют графы с  $m$  ребрами и заданным циклическим типом произведения транспозиций, а связные простые числа Гурвица — связные графы.

Выполненное нами в предыдущем разделе вычисление показывает, что

$$h_{n-1, n^1} = n^{n-3}.$$

Ниже мы обозначаем разбиения одним из двух эквивалентных образов — либо как последовательность невозрастающих частей,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ , where  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ , в которой лишь конечное число частей отлично от нуля, либо в мультипликативной записи  $1^{k_1} 2^{k_2} \dots$ , где  $k_i$  обозначает кратность части  $i$  в разбиении и все кратности за исключением конечного числа равны 0 (а соответствующие им части не включаются в обозначение).

*Пример 7.4.2.* Пусть  $n = 3$  и  $\mu = 3^1$ . Произведение любых двух различных транспозиций в  $\mathcal{S}_3$  дает цикл длины 3, а подгруппа, ими порожденная, совпадает с  $\mathcal{S}_3$  и поэтому действует на множестве  $N_3$  транзитивно. Поэтому

$$h_{2;3^1}^\circ = h_{2;3^1} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1,$$

поскольку всего есть  $3 \cdot 2 = 6$  упорядоченных пар различных транспозиций. Это частный случай — для  $n = 3$  — нумерации помеченных деревьев.

Отметим, что если как простое число Гурвица, так и соответствующее связанное простое число Гурвица отличны от нуля, то они совпадают в том и только в том случае, если перестановка  $\sigma$  представляет собой длинный цикл: в этом случае подгруппа группы перестановок, порожденная транспозициями  $\tau_i$ , автоматически действует транзитивно, а во всех остальных случаях это не так.

С ростом порядка симметрической группы и сложности разбиения прямые вычисления чисел Гурвица становятся все более сложными, и мы ограничимся лишь еще одним примером.

*Пример 7.4.3.* Пусть  $n = 3$  и пусть  $\mu = 1^1 2^1$  — циклический тип транспозиции. Разумеется, транспозицию можно представить как единственную транспозицию. Однако она допускает и представление в виде произведения трех транспозиций. Более того, произведение любой тройки транспозиций является нечетной перестановкой, а значит, транспозицией. Поэтому

$$h_{3;1^1 2^1}^\circ = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}.$$

Среди  $3^3 = 27$  троек транспозиций 3 тройки порождают подгруппы, действующие нетранзитивно (это подгруппы, состоящие из троек совпадающих транспозиций). Таким образом,

$$h_{3;1^1 2^1} = \frac{1}{6} \cdot (27 - 3) = 4.$$

Этот пример показывает, что числа Гурвица могут быть и дробными. Так оказывается даже в простейшем случае

$$h_{1;2^1}^\circ = h_{1;2^1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Более общим образом, для набора разбиений  $\mu_1, \dots, \mu_m$  числа  $n$  мы можем рассмотреть общие числа Гурвица, перечисляющие разложения тождественной перестановки в произведении вида

$$\sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1,$$

в которых каждая перестановка  $\sigma_i$  имеет циклический тип  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . (В случае простых чисел Гурвица все перестановки за исключением одной являются транспозициями, а последняя равна  $\sigma^{-1}$  и ее циклический тип

такой же, как у  $\sigma$ ). *Общее число Гурвица* определяется как число наборов из  $m$  перестановок  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  данных циклических типов, поделенное на  $n!$ . *Связные числа Гурвица* определяются аналогичным образом с добавлением требования транзитивности действия подгруппы  $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_m \rangle \subset S_n$ , порожденной перестановками  $\sigma_i$ . Мы не собираемся использовать общие числа Гурвица, поэтому не вводим обозначений для них.

## 7.5 Уравнение транспозиции

Введем две производящих функции для простых чисел Гурвица:

$$H^\circ(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu}^\circ p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}; \quad (7.4)$$

$$H(u; p_1, p_2, \dots) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mu} h_{m;\mu} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots \frac{u^m}{m!}, \quad (7.5)$$

где в обоих случаях  $\mu$  пробегает множество всех разбиений.

Как обычно, производящая функция для несвязных объектов является экспонентой производящей функции для связных:

**Теорема 7.5.1.** *Справедливо равенство  $H^\circ = \exp(H)$ .*

Это утверждение позволяет переформулировать утверждения о простых числах Гурвица в терминах связных простых чисел Гурвица и наоборот.

**Теорема 7.5.2 (уравнение транспозиции [?]).** *Производящая функция  $H^\circ$  для простых чисел Гурвица удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) H^\circ. \quad (7.6)$$

Прежде чем доказывать теорему, отметим, что уравнение транспозиции дает явную формулу для производящей функции  $H^\circ$ . Действительно, присвоим переменной  $p_i$  вес  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , так что вес монома  $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots$  равен  $k_1 + 2k_2 + \dots$ . Тогда функцию  $H^\circ$  можно представить в виде суммы функций  $H^\circ = H_0^\circ + H_1^\circ + \dots$ , где  $H_k^\circ = H_k^\circ(u; p_1, p_2, \dots)$  это сумма мономов веса  $k$  в  $H^\circ$ . Каждая функция  $H_k^\circ$  является суммой конечного числа мономов от  $p_i$  (их число равно количеству разбиений числа  $k$ ) коэффициенты в которой являются формальными рядами от  $u$ . Поскольку оба оператора — слева  $\frac{\partial}{\partial u}$  и справа

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left( (i+j)p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} + ij p_{i+j} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right)$$



в уравнении (7.6) сохраняют веса мономов это уравнение раскладывается в прямую сумму конечномерных уравнений, по одному на каждую из функций  $H_k^\circ$ .

Начальные условия имеют вид

$$H(0; p_1, p_2, \dots) = p_1,$$

откуда

$$H^\circ(0; p_1, p_2, \dots) = e^{p_1},$$

или

$$H_k^\circ(0; p_1, p_2, \dots) = \frac{p_1^k}{k!}.$$

Для данного  $k$  конечномерное уравнение транспозиции можно решить явно. Посмотрим на примеры. Векторное пространство

**Вывод уравнения транспозиции.** Уравнение описывает, что происходит при умножении данной перестановки на транспозицию, т.е. представление

$$\sigma = \tau_m \circ \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

представлением

$$\tau_m \circ \sigma = \tau_{m-1} \circ \dots \circ \tau_1$$

(здесь мы воспользовались тем, что перестановка  $\tau_m^2$  является тождественной). Уменьшение числа транспозиций справа на единицу означает дифференцирование по  $u$  слева в уравнении (7.6), поскольку эта процедура понижает на единицу степень по  $u$ .

Умножение на транспозицию  $\tau_m$  меняет перестановку  $\sigma$  одним из двух различных способов: либо  $\tau_m$  меняет местами два элемента, принадлежащих одному циклу в  $\sigma$ , либо эти два элемента принадлежат различным циклам. В первом случае цикл в  $\sigma$  расщепляется на два цикла, сумма длин которых совпадает с длиной расщепленного цикла. Во втором случае, наоборот, два цикла склеиваются в единый цикл длины, равной сумме длин склеивающихся циклов. Два слагаемых справа в уравнении транспозиции соответствуют этим двум возможностям. Коэффициенты в уравнении отвечают количеству способов выбрать два элемента, переставляемые транспозицией  $\tau_m$ : для каждого из  $i + j$  элементов в цикле длины  $i + j$  пару можно подобрать единственным образом (при условии, что циклический порядок фиксирован), а в двух циклах длин  $i$  и  $j$  соответственно имеется  $i \cdot j$  способов выбрать пару элементов, перестановка которых склеивает эти циклы. Теорема доказана.

## 7.6 Перечисление посаженных лесов

Как мы видели, представления циклической перестановки в виде произведения минимально возможного числа транспозиций находятся во взаимно-однозначном соответствии с корневыми помеченными деревьями, и теорема

Кэли дает

$$h_{n-1;n} = n^{n-1}.$$

Экспоненциальная производящая функция

$$Y(q) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1;n} \frac{q^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{q^n}{n!} = \frac{1}{1!}q + \frac{2}{2!}q^2 + \frac{9}{3!}q^3 + \frac{64}{4!}q^4 + \dots,$$

вместе с экспоненциальной производящей функцией

$$Z(q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n \frac{q^n}{n!} = \frac{1}{1!}q + \frac{4}{2!}q^2 + \frac{27}{3!}q^3 + \dots$$

порождают очень интересную алгебру формальных рядов. Несмотря на то, что функции  $Y$  и  $Z$  кажутся очень похожими друг на друга, они очень по-разному ведут себя относительно умножения. Обозначим через  $\mathcal{A}$  алгебру формальных степенных рядов, порожденных рядами  $Y$  и  $Z$ . Отметим, что эти ряды алгебраически зависимы:

$$Z(t) = \frac{1}{1 - Y(t)}.$$

Эти ряды позволяют перечислить посаженные деревья. Перечисление помеченных деревьев обобщает формулу Кэли.

Деревья, которые мы будем перечислять, посажены на некоторых графах. Рассматриваемые нами графы неориентированы, но могут иметь петли и кратные ребра. Корневой граф называется *круглым*, если (1) он связан; (2) он не содержит вершин валентности 1 за исключением, быть может, корня и смежных с ним вершин и он не содержит вершин валентности 2 за исключением, быть может, корня.

Пусть  $G$  — связный корневой граф и пусть  $v$  — вершина валентности 1 (лист) в  $G$ , не являющаяся ни корнем, ни смежной с ним вершиной. Тогда граф  $S_v(G)$  получается из  $G$  стиранием вершины  $v$  и выходящего из нее ребра. Для вершины  $w$  валентности 2, не являющейся корнем, граф  $D_w(G)$  получается из  $G$  стиранием вершины  $w$  и последующим слиянием выходящих из нее ребер в общее ребро.

Применяя операции  $S$  и  $D$  к подходящим вершинам корневого связного графа в произвольном порядке, мы получим круглый граф, который не зависит от порядка применяемых операций. Этот круглый граф  $H$  называется *базой* исходного графа  $G$ , и мы говорим, что  $G$  является *лесом, посаженным на  $H$* .

Обозначим через  $f_H(n)$  взвешенное число корневых графов с  $n + 1$  вершинами и базой  $H$ , все некорневые вершины которых помечены различными числами от 1 до  $n$ . Вес, о котором идет речь — это порядок группы автоморфизмов помеченного графа. Введем производящую функцию

$$F_H(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( f_H(n) \frac{q^n}{n!} \right)$$

где суммирование идет по всем лесам, посаженным на  $H$ . Тогда

$$F_H(q) = \frac{1}{|\text{Aut}(H)|} Y^{|V(H)|} (1+Z)^{|E(H)|}; \quad (7.7)$$

здесь  $|V(H)|$  это число вершин в  $H$ , без учета корня, и  $|E(H)|$  это число ребер в  $H$ . Таким образом, производящая функция  $F_H(q)$  лежит в алгебре  $\mathcal{A}$ .

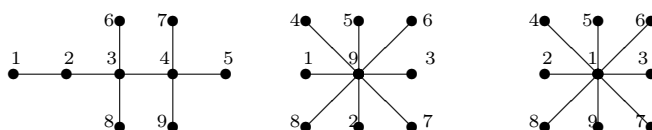
Равенство (7.7) доказать несложно: множитель  $Y^{|V(H)|}$  перечисляет деревья, высаженные на вершинах базового графа  $H$ , а множитель  $(1+Z)^{|E(H)|}$  перечисляет деревья, высаженные на его ребрах. У каждого дерева первого вида есть выделенный корень — вершина, отождествленная с соответствующей вершиной графа  $H$ . Каждое дерево второго вида имеет две выделенных вершины — это две вершины, ближайшие к концам ребра графа  $H$ , на котором высажено дерево (отметим, что эти две вершины могут совпадать). В дереве любые две вершины соединяются единственным путем, и этот путь отождествляется с отрезком ребра, на котором высажено дерево. Производящая функция  $1+Z$  в точности перечисляет помеченные деревья с двумя выделенными вершинами.

## 7.7 Задачи

*Задача 7.1.* Нарисуйте помеченные деревья, коды Прюфера которых равны а)  $x_1^2 x_2^3 x_1 x_4$ ; б)  $x_6^4$ ; в)  $x_2^3 x_3 x_1^2$ .

*Задача 7.2.* Выпишите коды Прюфера всех помеченных деревьев с четырьмя вершинами и убедитесь, что каждая последовательность длины два из букв  $x_1, x_2, x_3, x_4$  встречается среди этих кодов ровно один раз.

*Задача 7.3.* Выпишите коды Прюфера помеченных деревьев



*Задача 7.4.* Докажите, что (некорневые) леса на  $n$  помеченных вершинах перечисляются экспоненциальной производящей функцией

$$\exp \left( 1 \cdot \frac{s}{1!} s + 1 \cdot \frac{s^2}{2!} + 3 \cdot \frac{s^3}{3!} + \dots + n^{n-2} \cdot \frac{s^n}{n!} + \dots \right).$$

*Задача 7.5.* Пусть  $\Gamma$  — связный граф на  $n$  вершинах с единственным простым циклом. Докажите, что произведение в  $\mathcal{S}_n$  всех транспозиций, соответствующих ребрам графа  $\Gamma$ , раскладывается в произведение двух независимых циклов вне зависимости от порядка умножения транспозиций.

*Задача 7.6.* Докажите, что для графа  $C_n$  — цикла на  $n$  вершинах — длины двух циклов в произведении транспозиций, отвечающих всем его ребрам, не зависят от порядка умножения транспозиций.

*Задача 7.7.* Приведите пример связного графа с единственным простым циклом, в котором длины двух циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависят от выбранного порядка умножения.

*Задача 7.8.* Приведите пример связного графа, в котором количество циклов в произведении всех транспозиций, отвечающих его ребрам, зависит от порядка умножения транспозиций. (В таком графе должно быть больше одного простого цикла.)