Глава 4

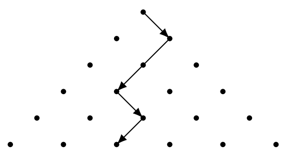
Производящие функции нескольких переменных

Производящие функции от двух переменных отвечают двухиндексным последовательностям. Такие последовательности удобно записывать в виде треугольника (соответствующего положительному квадранту целочисленной решетки).

4.1 Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля изображен на рис. 4.1. Элементы этого треугольника перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, составленных из векторов единичной длины двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево-вниз.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$



$$\begin{array}{c}
c_{0,0} \\
c_{1,0} \quad c_{1,1} \\
c_{2,0} \quad c_{2,1} \quad c_{2,2} \\
c_{3,0} \quad c_{3,1} \quad c_{3,2} \quad c_{3,3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
C_{0,0} \\
C_{1,0} \quad C_{0,1} \\
C_{2,0} \quad C_{1,1} \quad C_{0,2} \\
C_{3,0} \quad C_{2,1} \quad C_{1,2} \quad C_{0,3}
\end{array}$$

Рис. 4.1: Треугольник Паскаля и пути, которые он перечисляет

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, — это уже хорошо знакомые нам биномиальные коэффициенты

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Это несложно доказать индукцией по n. Предположим, что числа в n-й строчке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена $(1+s)^n$. Число различных путей, ведущих в точку $(n+1,k)$, равно сумме числа путей, ведущих в точку $(n,k-1)$, и числа путей, ведущих в точку (n,k), $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}$. Поэтому число $c_{n+1,k}$ совпадает с коэффициентом при s^k в многочлене $(1+s)\cdot(1+s)^n = (1+s)^{n+1}$.

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Например, можно рассмотреть производящую функцию

$$\begin{aligned}\sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k}x^k y^n &= \sum_{n,k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.\end{aligned}$$

Второй способ соответствует нумерации элементов треугольника числом отрезков каждого типа на путях, ведущих в соответствующую точку (рис. 4.1 г)). Для этой нумерации

$$C_{n,m} = c_{n+m,m} = \binom{n+m}{m},$$

и производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m}x^n y^m &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n+m=k}\binom{n+m}{n}x^n y^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.\end{aligned}$$

На этот раз она оказалась симметричной по переменным x и y.

И, наконец, имеется еще один способ: сопоставить треугольнику Паскаля экспоненциальную производящую функцию. Экспоненциальная производящая функция отличается от обычной тем, что в качестве коэффициентов степенного ряда берутся не элементы последовательности a_n, а числа $a_n/n!$. Экспоненциальные производящие функции заслуживают отдельного обсуждения, к кторомму мы сейчас и переходим.

4.2 Экспоненциальные производящие функции

Зафиксируем произвольную последовательность $\{\alpha_n\}$. Каждой последовательности $\{a_n\}$ мы можем сопоставить производящую функцию

$$\{a_n\} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n s^n,$$

определяемую последовательностью $\{\alpha_n\}$. Если в последовательности $\{\alpha_n\}$ отсутствуют нулевые элементы, то такое сопоставление взаимно однозначно. До сих пор мы пользовались только обычными производящими функциями — отвечающими последовательности $\alpha_n \equiv 1$. В зависимости от преследуемых целей пользу могут принести и другие последовательности. Чаще всего используется последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n!}$. Соответствующие ей производящие функции называются *экспоненциальными*.

Экспоненциальные производящие функции для целочисленных последовательностей называются *функциями Гурвица*.

Чем отличаются экспоненциальные производящие функции от обычных? Посмотрим на поведение экспоненциальных производящих функций при выполнении операций над ними. Сумма ведет себя обычным образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)}{n!} s^n,$$

а вот произведение иначе:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots\right)\left(\frac{b_0}{0!} + \frac{b_1}{1!}s + \frac{b_2}{2!}s^2 + \dots\right) \\
&= \frac{a_0}{0!}\frac{b_0}{0!} + \left(\frac{a_0}{0!}\frac{b_1}{1!} + \frac{a_1}{1!}\frac{b_0}{0!}\right)s + \left(\frac{a_0}{0!}\frac{b_2}{2!} + \frac{a_1}{1!}\frac{b_1}{1!} + \frac{a_2}{2!}\frac{b_0}{0!}\right)s^2 + \dots .
\end{aligned}$$

Коэффициенты $\frac{c_n}{n!}$ произведения вычисляются по формуле

$$c_n = \binom{n}{0} a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a_n b_0.$$

Еще одно существенное отличие экспоненциальных производящих функций от обычных наблюдается при взятии производных (и интегрировании). Дифференцирование или интегрирование экспоненциальной производящей функции приводит к сдвигу последовательности ее коэффициентов без изменения их величины:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots\right)' &= \frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!}s + \frac{a_3}{2!}s^2 + \dots\ ; \\
\int \left(\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \dots\right) &= \frac{a_0}{1!}s + \frac{a_1}{2!}s^2 + \frac{a_2}{3!}s^3 + \frac{a_3}{4!}s^4 + \dots\ .
\end{aligned}$$

Обычная производящая функция $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ выражается через экспоненциальную $\mathcal{A}(t) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots$ по формуле

$$A(s) = \int_0^\infty e^{-t}\mathcal{A}(st)dt.$$

Действительно,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^k dt = -\int_0^\infty t^k de^{-t} = \int_0^\infty e^{-t}dt^k = k\int_0^\infty e^{-t}t^{k-1}dt = \dots = k!.$$

Теперь мы можем выписать экспоненциальную производящую функцию для треугольника Паскаля:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{(n+m)!}\binom{n+m}{m}x^n y^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

4.3 Треугольник Дика

Треугольник Дика перечисляет пути в положительном квадранте плоскости, выходящие из начала координат и составленные из векторов $(1,1)$ и $(1,-1)$ (см. рис. 4.2). Пути, оканчивающиеся на оси абсцисс, — это пути Дика из раздела 3.3.

					1		6		27	
				1		5		20		75
			1		4		14		48	
		1		3		9		28		90
	1		2		5		14		42	
1		1		2		5		14		42

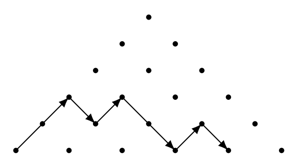


Рис. 4.2: Треугольник Дика и пути, которые он перечисляет

Нетрудно видеть, что элементы d_{ij} треугольника Дика отличны от нуля в том и только в том случае, если $i \geq j$ и $i + j$ четно. Обозначим через $D(x,y)$ производящую функцию Дика двух переменных

$$D(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_{ij}x^i y^j.$$

Правило построения треугольника Дика подсказывает нам уравнение на эту производящую функцию

$$xyD(x,y) + (D(x,y) - D(x,0))\frac{x}{y} = D(x,y) - 1.$$

Действительно, коэффициент при любом мономе $x^i y^j$, отличном от единичного, представляет собой сумму коэффициентов при мономах $x^{i-1}y^{j-1}$ и $x^{i-1}y^{j+1}$. Функция

$$D(x,0) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$$

нам хорошо известна, и ряд $D(x,y)$ находится решением линейного уравнения,

$$D(x,y) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}-2xy}{2x(x^2y+x-y)}.$$

4.4 Треугольник Бернулли–Эйлера и перечисление up-down перестановок

Треугольник Бернулли–Эйлера (рис. 4.3), как и треугольник Паскаля, обладает многими замечательными свойствами. Левая сторона этого треугольника называется *стороной Бернулли*, правая — *стороной Эйлера*[1].

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
 & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & \\
16 & & 16 & & 14 & & 10 & & 5 & & 0
\end{array}$$

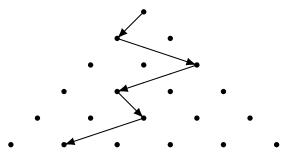


Рис. 4.3: Треугольник Бернулли–Эйлера и пути, которые он перечисляет

Элементы треугольника Бернулли–Эйлера — тоже числа путей из вершины треугольника в данную клетку. Но при этом рассматриваются только пути, идущие зигзагом: нечетные шаги влево, четные — вправо. Поэтому каждое число в треугольнике Бернулли–Эйлера равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева или справа от него, в зависимости от четности строки.

Можно дать и более простое индуктивное правило определения чисел в треугольнике Бернулли–Эйлера, если чередовать знаки через каждые две строчки (см. рис. 4.4). В таком альтернированном треугольнике каждый элемент равен сумме двух ближайших элементов, стоящих справа и справа сверху от него. Для того чтобы однозначно задать треугольник, необходимо доопределить сторону Эйлера, чем мы сейчас и займемся.

Нам понадобится еще одна интерпретации треугольника Бернулли–Эйлера — в терминах up-down перестановок.

[1] Отметим, что есть еще две последовательности чисел, которые также носят имена Бернулли и Эйлера.

```
                        1
                    1       0
               -0      -1      -1
          -2      -2      -1       0
       0       2       4       5       5
   16     16      14      10       5       0
0     -16     -32     -46     -56     -61     -61
```

Рис. 4.4: Альтернированный треугольник Бернулли–Эйлера

Определение 4.4.1. Перестановка на множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ называется *пилообразной*, или *up-down* перестановкой, если каждый элемент в ней либо больше, либо меньше обоих своих соседей.

Например, перестановка $(3, 2, 7, 1, 6, 4, 5)$ — пилообразная. Вот все пилообразные перестановки для $n = 2, 3, 4, 5$, в которых последний элемент меньше своего левого соседа (а значит, первый элемент больше своего правого соседа, если n четно, и меньше его, если n нечетно):

$(2, 1)$

$(1, 3, 2)$ $(2, 3, 1)$

$(2, 1, 4, 3)$ $(3, 1, 4, 2)$ $(3, 2, 4, 1)$ $(4, 1, 3, 2)$ $(4, 2, 3, 1)$

$(1, 3, 2, 5, 4)$ $(1, 4, 2, 5, 3)$ $(1, 4, 3, 5, 2)$ $(1, 5, 2, 4, 3)$ $(1, 5, 3, 2, 4)$ $(2, 3, 1, 5, 4)$

$(2, 4, 1, 5, 3)$ $(2, 4, 3, 5, 1)$ $(2, 5, 1, 4, 3)$ $(2, 5, 3, 4, 1)$ $(3, 4, 1, 5, 2)$ $(3, 4, 2, 5, 1)$

$(3, 5, 1, 4, 2)$ $(3, 5, 2, 4, 1)$ $(4, 5, 1, 3, 2)$ $(4, 5, 2, 3, 1)$

Тем самым, последовательность чисел пилообразных перестановок, последний элемент в которых меньше своего правого соседа, начинается так: $1, 1, 2, 5, 16, \ldots$. Это в точности те числа, которые стоят по сторонам треугольника Бернулли–Эйлера: числа с четными номерами — ненулевые элементы стороны Бернулли, а числа с нечетными номерами — ненулевые элементы стороны Эйлера. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие пилообразные перестановки, в которых последний элемент меньше своего левого соседа, и не будем это специально оговаривать, называя их просто пилообразными перестановками.

Чтобы понять, откуда берется связь с треугольником Бернулли–Эйлера, рассмотрим пилообразные перестановки, первый элемент в которых равен k.

Лемма 4.4.2. *Пусть $c_{n,k}$ — число up-down перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, начинающихся с $n+1-k$. Тогда $c_{n,k}$ есть k-е число в n-й строке треугольника Бернулли–Эйлера.*

Например, как видно из предыдущего списка, среди пилообразных перестановок пяти элементов 5 начинаются с 1, еще 5 — с двойки, 4 — с тройки, 2 — с четверки и ни одна не начинается с пятерки. Строка $0, 2, 4, 5, 5$ совпадает с четвертой строкой треугольника Бернулли–Эйлера.

Доказательство. Для первых двух строк треугольника утверждение проверяется непосредственно. Докажем, что если оно верно для n-й строки, то оно верно и для строки с номером $n+1$. Пусть, для определенности, $n+1$ четно. Тогда n и $n+2$ нечетны; мы изучаем перестановки из $n+1$ элементов. Первый элемент в такой перестановке является локальным максимумом, второй — минимумом, поэтому второй элемент меньше первого.

Отбрасывание первого элемента в перестановке после перенумерации остальных элементов с сохранением их относительного порядка дает однозначно определенную up-down перестановку на множестве из n элементов. Наоборот, по каждой пилообразной перестановке множества $\{1, 2, \dots, n\}$, первый элемент в которой равен $l < k$, можно построить пилообразную перестановку множества $\{1, 2, \dots, n+1\}$, первый элемент в которой равен k: допишем k слева и увеличим на 1 все элементы $k, k+1, \dots, n$.

Таким образом,

$$c_{n+1,k} = c_{n,k} + c_{n,k+1} + \dots + c_{n,n}.$$

Для строки с нечетным номером справедливо аналогичное рассуждение. Тем самым, числа $c_{n,k}$ удовлетворяют тем же соотношениям, что и элементы треугольника Бернулли–Эйлера, а значит, именно они и стоят в этом треугольнике. □

Выведем теперь производящие функции для сторон треугольника Бернулли–Эйлера. Рассмотрим по отдельности два случая:

- n нечетно; соответствующее число up-down перестановок обозначим через b_n и введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{B}(x) = \frac{b_1}{1!}x + \frac{b_2}{2!}x^2 + \dots = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots \ ;$$

- n четно; соответствующее число up-down перестановок обозначим через e_n и введем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{E}(y) = 1 + \frac{e_1}{1!}y + \frac{e_2}{2!}y^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{5}{4!}y^4 + \dots \ .$$

Выведем рекуррентную формулу для числа up-down перестановок. Максимальный элемент в пилообразной перестановке разделяет ее на две перестановки, каждая из которых является пилообразной — нужно лишь перенумеровать элементы в левой и правой части перестановки, сохраняя их относительный порядок. Например,

$$(2, 7, 3, 9, 1, 6, 5, 8, 4) \mapsto ((2, 7, 3), (1, 6, 5, 8, 4)) \mapsto ((1, 3, 2), (1, 4, 3, 5, 2)).$$

В результате мы сопоставили каждой пилообразной перестановке на множестве из $n+1$ элементов две пилообразные перестановки на множестве из k и из $n-k$ элементов, $n-k$ нечетно.

При нечетном n получаем рекуррентное соотношение на числа b_n:

$$b_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} b_k b_{n-k}. \tag{4.1}$$

Биномиальный коэффициент возникает из-за того, что при склеивании двух up-down перестановок мы должны всеми возмножными способами распределить номера по левой и правой частям перестановки, т.е. выбрать из n номеров те, которые соответствуют левой перестановке.

Вспоминая, что для экспоненциальных производящих функций правая часть соответствует квадрату производящей функции $\mathcal{B}(x)$, а левая — ее же производной, перепишем уравнение (4.1) в виде

$$\mathcal{B}'(x) = \mathcal{B}^2(x) + 1. \tag{4.2}$$

Нетрудно проверить, что у этого уравнения есть единственное решение, разложение которого начинается с $B(x) = x + \dots$. Такое решение мы знаем — это тангенс, поскольку $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$. (Уравнение (4.2) несложно и решить непосредственно. Имеем

$$\frac{d\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2+1} = dx \ \Rightarrow\ \int \frac{d\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2+1} = \int dx \ \Rightarrow\ \operatorname{arctg} \mathcal{B} = x \ \Rightarrow\ \mathcal{B} = \operatorname{tg} x.)$$

Таким образом, сторона Бернулли определяет разложение в ряд тангенса:

$$\mathcal{B}(x) = \operatorname{tg} x = x + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + 272\frac{x^7}{7!} + \dots .$$

Коэффициенты b_n в разложении тангенса называются *тангенциальными числами*. Обратите внимание на то, что единица в вершине треугольника не включается в сторону Бернулли.

Если же n четно, то рекуррентное соотношение принимает вид

$$e_{n+1} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{n}{k} e_k b_{n-k}, \tag{4.3}$$

и ему соответствует уравнение

$$\mathcal{E}'(y) = \mathcal{E}(y)\mathcal{B}(y) \tag{4.4}$$

на производящие функции. Решая последнее уравнение, получаем

$$\frac{\mathcal{E}'(y)}{\mathcal{E}(y)} = \mathcal{B}(y) \ \Rightarrow\ (\ln \mathcal{E}(y))' = \operatorname{tg} y \ \Rightarrow\ \ln \mathcal{E}(y) = \int \operatorname{tg} y \ \Rightarrow\ \mathcal{E}(y) = \frac{1}{\cos y},$$

и сторона Эйлера определяет разложение в ряд секанса. Коэффициенты e_n этого разложения называются *числами Эйлера* [2].

[2] Обычно числами Эйлера называют числа, стоящие на стороне Эйлера в альтернированном треугольнике (т.е. числа, знак которых меняется). Мы, однако, позволим себе не проводить различия между этими двумя последовательностями.

Воспользовавшись подстановкой

$$\sin x = \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)/2i, \quad \cos x = \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)/2,$$

мы можем переписать производящие функции сторон для альтернированного треугольника в виде

$$\widetilde{\mathcal{B}}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \widetilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}.$$

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления экспоненциальной производящей функции альтернированного треугольника Бернулли–Эйлера. Обозначим через $\mathrm{be}_{k,l}$ элемент треугольника, имеющий координату k вдоль стороны Бернулли и координату l вдоль стороны Эйлера.

Теорема 4.4.3. *Экспоненциальная производящая функция для треугольника Бернулли–Эйлера имеет вид*

$$\mathrm{BE}(x,y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathrm{be}_{k,l} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!} = \frac{2e^x}{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Докажем, что экспоненциальная производящая функция для треугольника Бернулли-Эйлера удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathrm{BE}(x,y) + \frac{\partial\,\mathrm{BE}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\,\mathrm{BE}(x,y)}{\partial x}.$$

Записанное выше равенство есть не что иное, как правило образования альтернированного треугольника. Действительно, рассмотрим прямую в треугольнике, параллельную стороне Эйлера. Дифференцирование по y экспоненциальной производящей функции этой прямой есть сдвиг на единицу вдоль стороны Эйлера. Суммируя результат дифференцирования с исходной функцией, мы получаем соседнюю прямую (так как $\mathrm{be}_{k,m} = \mathrm{be}_{k-1,m} + \mathrm{be}_{k-1,m+1}$), т.е. результат дифференцирования по x исходной экспоненциальной производящей функции.

Таким образом, функция $\mathrm{BE}(x,y)$ однозначно определяется своим начальным значением

$$\mathrm{BE}(0,y) = \widetilde{\mathcal{E}}(y) = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

и дифференциальным уравнением. Для доказательства теоремы осталось только проверить, что функция (4.5) удовлетворяет выписанному дифференциальному уравнению. □

4.5 Числа Эйлера в треугольнике Дика с кратностями

Присвоим векторам в k-ой строке треугольника Дика ($k = 1, 2, 3, \dots$) кратность k (см. рис. 4.5). Вычислив несколько первых элементов треугольника,

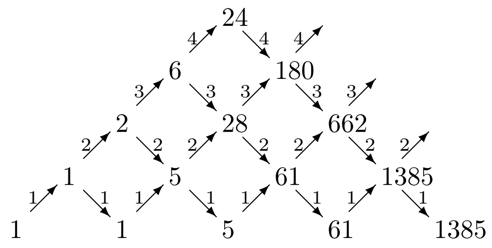


Рис. 4.5: Треугольник Дика с кратностями

мы замечаем, что в его основании стоят уже знакомые нам числа Эйлера. Докажем, что это действительно так.

Утверждение 4.5.1. *В основании треугольника на рис.* 4.5 *находятся числа Эйлера.*

Доказательство. Мы будем доказывать, что число различных путей длины $2n$ в треугольнике Дика с кратностями равно числу пилообразных перестановок на множестве $\{1, \ldots, 2n-1\}$. Присоединим к множеству элементов перестановки дополнительный элемент $2n$, считая его последним элементом каждой перестановки. (Напомним, что мы рассматриваем только такие пилообразные перестановки, которые остаются пилообразными при присоединении последнего максимального элемента.)

Сопоставим пилообразной перестановке путь в треугольнике Дика по следующему правилу. Элемент i перестановки является либо (локальным) максимумом, либо (локальным) минимумом в ней. Выберем i-й отрезок пути идущим вверх, если элемент i перестановки является минимумом, и идущим вниз в противном случае. На рис. 4.6 приведены пилообразная перестановка и соответствующий ей путь. Ясно, что получившийся путь действительно является путем Дика. В самом деле, количество максимумов в пилообразной перестановке равно количеству минимумов, и среди первых k элементов $1, \ldots, k$ не более половины максимумов при любом k.

(12,6,9,2,7,5,10,8,11,1,4,3)

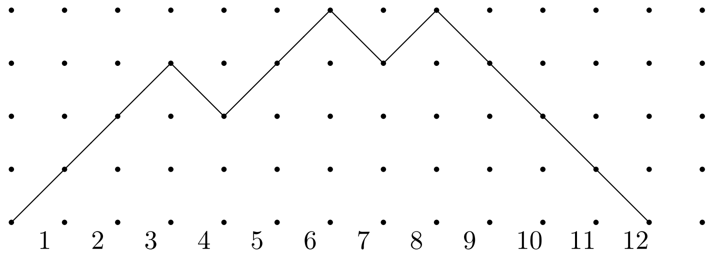


Рис. 4.6: Путь Дика, отвечающий пилообразной перестановке

Выясним, сколько перестановок соответствуют данному пути. Предположим, что путь, отвечающий первым m элементам перестановки, заканчивается на высоте k. И предположим также, что последний элемент m является максимумом (т.е. последний вектор пути — спуск). Каким может быть минимум, примыкающий к максимуму m справа? Этот минимум лежит среди первых $m-1$ элементов перестановки, и его можно выбрать $k+1$ различными способами. Действительно, если за каждым максимумом среди элементов $1,\dots,m-1$ уже закреплен парный соседний справа минимум, то свободных минимумов осталось ровно $k+1$.

Рассуждение для случая, когда последний элемент m — минимум, проводится аналогично, только нужно выбирать соседний справа максимум и идти по перестановке справа налево, а не слева направо.

4.6 Производящая функция для треугольника Дика с кратностями

Обозначим элементы треугольника Дика с кратностями с рис. 4.5 через $g_{n,k}$, где индекс n отвечает горизонтальной оси координат, а индекс k — вертикальной. Рассмотрим производящую функцию для взвешенного треугольника Дика, экспоненциальную по горизонтальной переменной и обычную по вертикальной:

$$\mathcal{G}(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}g_{n,k}t^k\frac{s^n}{n!}=1+t\frac{s}{1!}+(1+2t^2)\frac{s^2}{2!}+(5t+6t^3)\frac{s^3}{3!}+(5+28t^2+24t^4)\frac{s^4}{4!}+\dots.$$

Правило образования треугольника Дика с кратностями переписывается как следующее рекуррентное соотношение для элементов треугольника:

$$g_{n+1,k}=kg_{n,k-1}+(k+1)g_{n,k+1}. \tag{4.6}$$

В свою очередь, это рекуррентное соотношение на языке производящих функций принимает вид

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial s}=t\mathcal{G}+(1+t^2)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}. \tag{4.7}$$

Единственным решением уравнения (4.7), удовлетворяющим начальному условию $\mathcal{G}(0,t)=1$, является функция

$$\mathcal{G}(s,t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\cos(s+\operatorname{arctg}(t))}, \tag{4.8}$$

которая и есть искомая производящая функция для взвешенного треугольника Дика.

4.7 Задачи

Задача 4.1. Докажите, что производящая функция для многочленов Чебышева T_n, определяемых формулой $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$, имеет вид

$$\sum_{n\geq 0} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

Задача 4.2. Найдите производящую функцию от двух переменных для треугольника Моцкина (см. задачу 3.1).

Задача 4.3. Докажите, что

- а) сумма и произведение двух функций Гурвица является функцией Гурвица;
- б) производная и интеграл функции Гурвица является функцией Гурвица;
- в) результат подстановки функции Гурвица в функцию Гурвица является функцией Гурвица.

Задача 4.4. Пусть последовательность $\{a_n\}$ определена условиями

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = (n+1)a_n - \binom{n}{2} a_{n-2},\ n > 1.$$

Докажите, что экспоненциальная производящая функция $A(s)$ для этой последовательности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-s)A'(s) = \left(1 - \frac{1}{2}s^2\right) A(s)$$

и имеет вид

$$A(s) = (1-s)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}}.$$

Задача 4.5. Найдите производящую функцию $D(s,t) = \sum d_{n,k} s^n t^k$, где $d_{n,k}$ — число путей Дика длины n, высота которых не превышает k.

Задача 4.6. Проверьте, что функция (4.8) действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.7).

Задача 4.7. Докажите, что последовательность чисел в основании треугольников Дика и Моцкина с кратностями зависит лишь от произведения кратностей восходящего и нисходящего ребер в каждой строке, но не от того, как это произведение распределено по восходящему и нисходящему ребру.

Задача 4.8. Докажите, что следующие распределения кратностей по ребрам в треугольниках Дика и Моцкина приводят к указанным последовательностям в его основании и найдите производящие функции от двух переменных для каждого из этих треугольников:

- а) Если на восходящих ребрах в k-ой строке стоит k, а на нисходящих $k+1$, то в основании треугольника стоят числа Бернулли;
- б) Если на восходящих ребрах в k-ой строке стоит 1, а на нисходящих k, то в основании треугольника стоят числа двойные факториалы нечетных чисел, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$;
- в) Если на восходящих и горизонтальных ребрах в k-ой строке треугольника Моцкина стоит 1, а на нисходящих k, то в основании треугольника стоят числа I_n — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из n элементов, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 10, \dots$;
- г) Если на восходящих и нисходящих ребрах в k-ой строке треугольника Моцкина стоит k, а на горизонтальных $2k$, то в основании треугольника стоят числа $(n+1)!$;
- д) Если на восходящих и нисходящих ребрах в k-ой строке треугольника Моцкина стоит k, а на горизонтальных $2k-1$, то в основании треугольника стоят числа $n!$.

Задача 4.9. Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$h(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 s + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 s^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 s^3 + \dots$$

- а) Докажите, что
$$s(1-s)h''(s) + (1-2s)h'(s) - \frac{1}{4}h(s) = 0;$$
- б) Найдите асимптотику коэффициентов функции h.

Задача 4.10. Докажите, что степенной ряд

$$y(s) = 1 + \frac{2s}{1!} + \frac{6s^2}{2!} + \frac{20s^3}{3!} + \dots + \binom{2n}{n}\frac{s^n}{n!} + \dots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$sy'' + (1-4s)y' - 2y = 0.$$

Задача 4.11. Докажите, что производящая функция $y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k! s^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$s^2y'' + (3s-1)y' + y = 0.$$

Задача 4.12. Решите относительно y дифференциальное уравнение

$$y' = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y.$$

Задача 4.13. Докажите, что функция $y(s) = \frac{\arcsin s}{(1-s^2)^{1/2}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - s^2)y' - sy = 1$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.

Задача 4.14. Выпишите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$e^{s^2} \int e^{-s^2/2}$$

и найдите последовательность ее коэффициентов.