

## Глава 3

# Производящие функции путей на графах

Многие последовательности натуральных чисел полезно представлять себе как последовательности, перечисляющие пути в некоторых графах. При этом вид графа оказывается тесно связан со свойствами производящих функций, отвечающих данным последовательностям. В этой главе мы рассмотрим примеры таких перечислений.

### 3.1 Пути в графах

*Граф* представляет из себя набор вершин, некоторые из которых соединены ребрами. Часто удобно представлять себе граф нарисованным на плоскости (см. рис. 3.1). Среди перечислительных задач, о которых мы будем говорить, есть задачи перечисления путей в графе. Например, сосчитаем количество различных путей ладьи из клетки  $A$  в клетку  $B$  на доске, изображенной на рис. 3.2 а), при условии, что ладья может ходить только вправо или вверх в клетку, соседнюю с той, в которой она находится.



Рис. 3.1: Граф, изображенный на плоскости

Такие задачи проще всего решаются следующим способом. Поставим 1 в каждую клетку, до которой из  $A$  можно прийти за один шаг. Затем поставим числа во все клетки, до которых можно прийти за один шаг из этих клеток. Эти числа равны суммам всех единиц в клетках, из которых можно попасть в эти. Этот процесс можно продолжить и дальше, пока мы не доберемся до клетки  $B$ , см. рис. 3.2 б). Число 100 — сумма чисел в соседних клетках слева

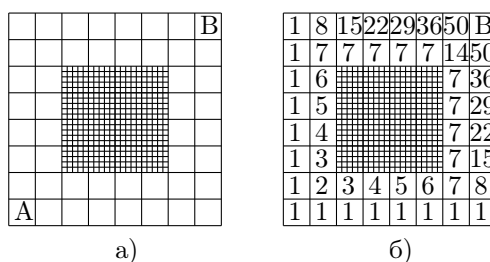


Рис. 3.2: а) Шахматная доска и б) подсчет количества путей ладьи, ведущих из клетки А в клетку В

и снизу, которое должно стоять в этой клетке, и будет интересующим нас количеством различных путей. Разнообразные варианты этого рассуждения играют принципиальную роль в решении многочисленных задач.

### 3.2 Пути, перечисляемые рациональными производящими функциями

Построим граф, пути в котором перечисляются последовательностью Фибоначчи. Мы рассмотрим два варианта построения такого графа. В первом варианте расположим (бесконечное) множество вершин графа слева направо, и будем считать вершины занумерованными числами  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Соединим каждую вершину ребром с ее правым соседом, а также с вершиной, следующей за ее правым соседом (см. рис. 3.3). (Мы делаем исключение, не проводя горизонтальную стрелку из первой вершины во вторую — начальные значения последовательности Фибоначчи выбраны произвольно и не подчиняются рекуррентному правилу.) На каждом ребре поставим стрелку, указывающую направление движения по нему. Для каждой вершины графа подсчитаем различные пути, идущие из начальной вершины в данную. Ясно, что число различных путей, ведущих из начальной вершины в вершину с номером  $n + 1$ ,  $n \geq 1$ , равно сумме числа путей, ведущих в вершину с номером  $n - 1$  и числа путей, ведущих в вершину с номером  $n$ . Тем самым, числа путей удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа Фибоначчи, и тем же начальным условиям; поэтому последовательность этих чисел совпадает с последовательностью Фибоначчи.

Другой способ построения графа состоит в следующем. Нарисуем две бесконечные последовательности вершин, одна над другой. Для удобства мы верхнюю последовательность сдвинем на одну позицию вправо (см. рис. 3.4). Из каждой вершины нижнего ряда выходят стрелочки в соседние с ней справа вершины обоих рядов. Из каждой вершины верхнего ряда выходит стрелочка в соседнюю справа вершину нижнего ряда. Число путей в этом графе, идущих из начальной точки в точку с номером  $n$  в

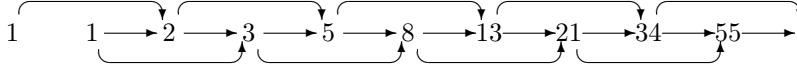


Рис. 3.3: Бесконечный граф для изображения путей, перечисляемых числами Фибоначчи

нижнем ряду точек, равно  $n$ -ому числу Фибоначчи. Над ним стоит  $(n - 1)$ -е число Фибоначчи. Пару чисел в графе, стоящих одно над другим, можно рассматривать как координаты двумерного вектора. Тогда преобразование перехода от очередной пары точек, образующих вертикальный столбик, к следующей паре есть не что иное, как линейное преобразование  $\Phi$ , которое мы рассматривали в п. 2.2: верхнее число в новом столбике совпадает с нижним числом предыдущего столбика, а нижнее равно сумме верхнего и нижнего чисел из предыдущего столбика.

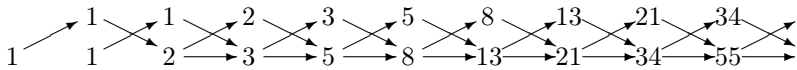


Рис. 3.4: Бесконечный граф из двух рядов вершин для изображения путей, перечисляемых числами Фибоначчи

Обобщим нашу конструкцию с чисел Фибоначчи на произвольные рациональные производящие функции. Обобщению поддаются оба способа построения графа, однако мы будем говорить лишь о втором, который приводит к «более читаемым» картинкам. Согласно теореме 2.3.1, последовательность коэффициентов рациональной функции задается линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами вида (2.8). В качестве примера рассмотрим последовательность, задаваемую соотношением третьего порядка

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_n,$$

с начальными условиями  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2$ . Вот начало этой последовательности: 1, 0, 2, 5, 10, 22, ... Поскольку порядок рекуррентного соотношения равен 3, вершины графа образуют три последовательности (см. рис. 3.5). Из каждой вершины двух нижних рядов идет стрелка в вершину следующего ряда, стоящую в следующем столбике. Кроме того, из каждой вершины третьего ряда и из каждой вершины нижнего ряда, начиная с третьей, идет стрелка в вершину нижнего ряда, стоящую в следующем столбике. При этом над горизонтальными стрелками в первом ряду мы ставим число 2 — «кратность», или «вес отрезка пути». Вместо этого мы могли бы нарисовать две стрелки, однако это загромодило бы рисунок (загромождение было бы еще более заметно, если бы вместо коэффициента 2 стояло

большее число). Точно так же мы могли бы нарисовать стрелки из второго ряда в нижний, поставив на них кратность 0, что тоже не сделало бы рисунок прозрачной.

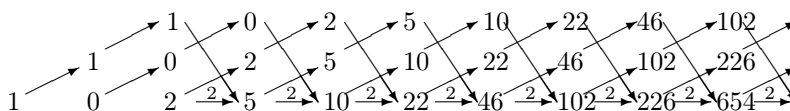


Рис. 3.5: Бесконечный граф для изображения путей, перечисляемых коэффициентами рациональной функции

Теперь ясно, как нарисовать граф, отвечающий произвольной рациональной функции. Кратность ребра при этом может быть произвольным числом, не обязательно натуральным (например, кратность может быть дробной или отрицательной). Эта кратность равна соответствующему коэффициенту в рекуррентном соотношении, задающем рациональную функцию. С помощью подобного графа легко сосчитать первые члены последовательности. Такой способ подсчета может оказаться эффективнее вычислений с помощью квазимногочленов — в том случае, если полюса рациональной функции не рациональны.

### 3.3 Числа Каталана

Порядок вычислений в арифметических выражениях задается расстановкой скобок, например,

$$(3 - 1) \cdot (4 + (15 - 9) \cdot (2 + 6)).$$

Если стереть все элементы выражения, за исключением скобок, то оставшиеся скобки образуют *правильную скобочную структуру* :

$$()(()).$$

Вот все правильные скобочные структуры с числом пар скобок 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} &() \\ &()() \quad (()) \\ &()()() \quad ()(()) \quad (())() \quad (())() \quad ((())) \end{aligned}$$

**Определение 3.3.1.** *Числом Каталана  $c_n$  называется число различных правильных скобочных структур из  $n$  пар скобок.*

Удобно полагать  $c_0 = 1$ . Тогда последовательность чисел Каталана начинается так:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, \dots$$

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Всякая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1. число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;
2. число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1 и 2, является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке соответствует парная ей правая. Парная правая скобка выделяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Рассмотрим в правильной скобочной структуре из  $n + 1$  пар скобок пару скобок, в которую входит самая левая скобка структуры. Тогда последовательность скобок внутри этой пары образует правильную скобочную структуру и последовательность скобок вне этой пары образует правильную скобочную структуру:  $(\dots)\dots$ , где каждое многоточие обозначает некоторую правильную скобочную структуру. Если число пар скобок во внутренней структуре равно  $k$ , то во внешней структуре  $n - k$  пар скобок. Наоборот, по каждой паре скобочных структур из  $k$  и  $n - k$  пар скобок можно восстановить структуру из  $n + 1$  пар скобок, заключив первую структуру в скобки и приписав к результату справа вторую структуру.

Отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для чисел Каталана. На этот раз соотношение оказывается нелинейным:

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \dots + c_n c_0. \quad (3.1)$$

Например, при  $n = 4$

$$\begin{aligned} c_5 &= c_0 c_4 + c_1 c_3 + c_2 c_2 + c_3 c_1 + c_4 c_0 \\ &= 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана

$$\begin{aligned} \text{Cat}(s) &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots \\ &= 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \dots \end{aligned}$$

Возведя ее в квадрат и умножив результат на  $s$ , получим

$$\begin{aligned} s \text{Cat}^2(s) &= c_0^2 s + (c_0 c_1 + c_1 c_0) s^2 + (c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) s^3 + \dots \\ &= s + 2s^2 + 5s^3 + 14s^4 + \dots \\ &= \text{Cat}(s) - 1, \end{aligned}$$

что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$s \operatorname{Cat}^2(s) - \operatorname{Cat}(s) + 1 = 0, \quad (3.2)$$

откуда

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s}. \quad (3.3)$$

(Второй корень уравнения отбрасывается, так как  $(1 + \sqrt{1 - 4s})/2s = 1/s + \dots$  содержит отрицательные степени  $s$ .)

Вид производящей функции (3.3) позволяет найти явную формулу для чисел Каталана. Согласно биному Ньютона

$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!},$$

откуда, умножая числитель и знаменатель на  $n!$  и сокращая на  $2^{n+1}$ , получаем

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (3.4)$$

В частности, производящая функция для чисел Каталана не является рациональной — формула для числа  $c_n$  показывает, что это число не является квазимногочленом от  $n$ .

Последняя формула дает и более простое (хотя и с переменными коэффициентами) рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} c_n. \quad (3.5)$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Литература, им посвященная, необозрима. Известно несколько десятков их различных определений. Приведем лишь еще две часто встречающиеся их реализации.

Рассмотрим выпуклый  $(n+2)$ -угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до  $n+1$ . *Диагональной триангуляцией* назовем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Всякая такая триангуляция содержит  $n-1$  диагональ. На рис. 3.6 приведены все различные диагональные триангуляции четырехугольника и пятиугольника.

Пусть  $t_n$  — число триангуляций  $(n+2)$ -угольника при  $n \geq 1$ ; положим  $t_0 = 1$ . Рассмотрим произвольную триангуляцию и выделим треугольник, примыкающий к стороне 01 (см. рис. 3.7 а)). Пусть  $k$  — номер третьей вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает  $(n+2)$ -угольник на  $k$ -угольник и  $(n-k+3)$ -угольник, каждый из которых триангулирован диагоналями. Перенумеруем вершины этих многоугольников против часовой стрелки так, чтобы нумерация вершин в каждом из них начиналась с 0 (см. рис. 3.7 б)). В результате получим пару триангуляций  $k$ -угольника и  $(n-k+3)$ -угольника.

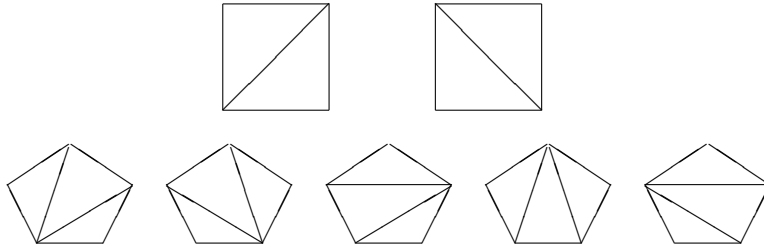


Рис. 3.6: Диагональные триангуляции 4-х и 5-угольника

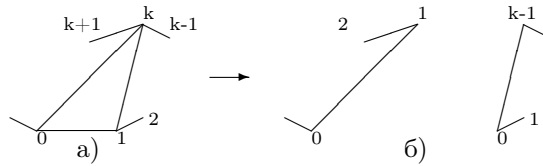


Рис. 3.7: а) Треугольник, примыкающий к стороне 01 и б) перенумерация вершин многоугольников разбиения

Наоборот, каждая пара триангуляций  $k$ -угольника и  $(n-k+3)$ -угольника определяет триангуляцию исходного многоугольника. Поэтому

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \dots + t_n t_0,$$

и поскольку  $t_0 = 1$ , последовательность чисел  $t_n$  совпадает с последовательностью Каталана.

Описанная выше процедура сопоставления триангуляции  $(n+2)$ -угольника пары триангуляций  $k$ -угольника и  $(n-k+3)$ -угольника позволяет установить и взаимно-однозначное соответствие между триангуляциями  $(n+2)$ -угольника и скобочными структурами из  $n$  пар скобок. Действительно, предположим, что для всех меньших значений  $n$  такое соответствие установлено. Каждой триангуляции  $(n+2)$ -угольника мы сопоставили пару триангуляций многоугольников с меньшим числом сторон. По предположению, этой паре триангуляций соответствует пара скобочных структур. Заключим первую из этих скобочных структур в скобки и припишем к ней вторую — получим новую скобочную структуру, соответствующую исходной триангуляции всего  $(n+2)$ -угольника.

Еще одна важная реализация чисел Каталана связана с путями Дика на плоскости. Рассмотрим целочисленную решетку в положительном квадранте. *Путь Дика* называется непрерывная ломаная, составленная из векторов  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ , начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс (см. рис. 3.8).

Совершенно ясно, как устанавливается соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами: нужно сопоставить вектору  $(1, 1)$  левую скобку, а вектору  $(1, -1)$  — правую скобку (см. рис. 3.8). Тогда условие, что путь лежит в верхней полуплоскости и заканчивается на

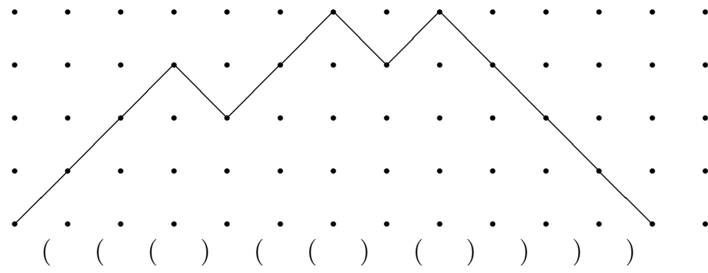


Рис. 3.8: Путь Дика и соответствующая ему скобочная структура

оси абсцисс, и есть в точности условие правильности скобочной структуры. Поэтому

*Число путей Дика из  $2n$  звеньев равно  $n$ -му числу Каталана  $c_n$ .*



### 3.4 Задачи

*Задача 3.1.* а) В графе на рис. 3.4 в вершину с номером 5 в нижнем ряду ведет 8 различных путей. Нарисуйте все эти пути. б) В графе на рис. 3.5 в вершину с номером 4 в нижнем ряду ведет 10 «различных» путей. Нарисуйте все эти пути.

*Задача 3.2.* Нарисуйте все 14 правильных скобочных структур из четырех пар скобок.

*Задача 3.3.* Пути Моцкина определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы  $(1, 0)$  (см. рис. 3.9). Число путей Моцкина из  $n$  векторов называется  $n$ -м числом Моцкина и обо-

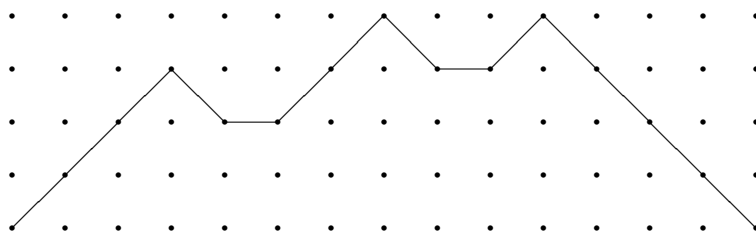


Рис. 3.9: Путь Моцкина

значается через  $m_n$ . Вот начало последовательности Моцкина:  $m_0 = 1, m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3$ . Вычислите несколько следующих членов этой последовательности. Найдите для нее рекуррентное соотношение и производящую функцию.

*Задача 3.4.* Придумайте алгоритмы последовательного вывода а) правильных скобочных структур; б) путей Моцкина.

*Задача 3.5.* Рассмотрим множество путей на прямой, состоящих из шагов длины 1 вправо или влево. Найдите производящую функцию для числа таких путей из  $n$  шагов, начинающихся в 0 и а) оканчивающихся в 0; б) оканчивающихся в 0 и не заходящих в отрицательную полупрямую; в) оканчивающихся в фиксированной точке  $N > 0$ ; г) оканчивающихся в фиксированной точке  $N > 0$  и не заходящих в отрицательную полупрямую.

*Задача 3.6.* Рассмотрим множество путей на прямой, состоящих из шагов длины 2 вправо и шагов длины 1 влево. Найдите производящую функцию для числа таких путей из  $n$  шагов, начинающихся в 0 и а) оканчивающихся в 0; б) оканчивающихся в 0 и не заходящих в отрицательную полупрямую; в) оканчивающихся в фиксированной точке  $N > 0$ ; г) оканчивающихся в фиксированной точке  $N > 0$  и не заходящих в отрицательную полупрямую.

*Задача 3.7.* В таблице из двух строк длины  $n$  расставлены числа от 1 до  $2n$ , каждое по одному разу так, что

- в каждой строке числа возрастают;

- в каждом столбце числа возрастают (т.е. число, стоящее во второй строке, больше стоящего над ним).

Подсчитайте число таких расстановок.

*Задача 3.8.* Преобразованием Ганкеля последовательности  $\{a_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называется последовательность  $h_n = H(\{a_n\})$ , состоящая из определителей

$$h_n = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Например, первые члены преобразования Ганкеля последовательности Каталана  $1, 1, 2, 5, \dots, \text{Cat}_n, \dots$  равны

$$|1| = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 1.$$

Докажите, что преобразование Ганкеля переводит а) последовательность Каталана в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; б) последовательность Каталана, начинающуюся с члена с номером 1, в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ ; в) последовательность Моцкина  $1, 1, 2, 3, \dots, m_n, \dots$  (см. задачу 3.5) в последовательность единиц  $1, 1, 1, \dots$ . г) Найдите преобразование Ганкеля последовательности Моцкина  $1, 2, 3, \dots, m_{n+1}, \dots$ , начинающейся с члена с номером 1.

*Задача 3.9.* Полимино (см. задачу 2.20) называется параллелограммным, если его граница представляет собой объединение двух ломаных, идущих вправо и вверх из общего левого нижнего конца в общий правый верхний конец, см. рис. 3.4. Докажите, что число параллелограммных полимино периметра  $2n + 2$  равно числу Каталана  $\text{Cat}_n$ .

Рис. 3.10: а) Параллелограммное полимино б) Пять параллелограммных полимино периметра 8

*Задача 3.10.* Докажите, что производящая функция для чисел Каталана допускает следующее разложения:

$$\text{Cat}(s) = 1 + \frac{s}{1-4s} - \frac{2s^2}{(1-4s)^2} + \frac{5s^3}{(1-4s)^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \text{Cat}_n s^n}{(1-4s)^n} + \dots$$

*Задача 3.11.* Рассмотрим множество путей на плоскости, состоящих из векторов  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Найдите производящую функцию для числа таких путей длины  $n$ , начинающихся в  $0$  и несамопересекающихся (т.е. векторы  $(1, 0)$  и  $(-1, 0)$  не могут идти непосредственно друг за другом).

*Задача 3.12.* Найдите произведение Адамара производящей функции для чисел Каталана и производящих функций а)  $\frac{1}{1-s}$ ; б)  $\frac{1}{(1-s)^2}$ ; в)  $\frac{1}{(1-s)^3}$ .