Глава 2

Рациональные производящие функции

Рациональные производящие функции образуют большой класс производящих функций. Производящие функции, встречающиеся на практике, очень часто принадлежат к этому классу. Кроме того, теория рациональных производящих функций совпадает, по существу, с теорией решений обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

2.1 Геометрическая прогрессия

Простейшая рациональная функция отвечает простейшей последовательности коэффициентов — постоянной последовательности $1, 1, 1, \dots$. Производящая функция для этой последовательности имеет вид

$$G(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots, \tag{2.1}$$

и ее несложно выразить через элементарные производящие функции, которые мы рассматривали в предыдущей главе. Действительно, умножив обе части равенства (2.1) на s, получим

$$\begin{aligned} sG(s) &= s + s^2 + s^3 + s^4 + \dots \\ &= G(s) - 1, \end{aligned}$$

откуда

$$G(s) = \frac{1}{1-s} = (1-s)^{-1}. \tag{2.2}$$

Тот же вывод с незначительными изменениями проходит для произвольной последовательности вида $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$:

$$\begin{aligned} G_{a,r}(s) &= a + ars + ar^2s^2 + ar^3s^3 + \dots \\ &= a\left(1 + (rs) + (rs)^2 + (rs)^3 + \dots\right), \end{aligned}$$

откуда

$$rsG_{a,r}(s) = G_{a,r}(s) - a$$

и

$$G_{a,r}(s) = \frac{a}{1 - rs}. \tag{2.3}$$

Приведенные выше выкладки представляют собой не что иное, как известный вывод формулы для суммы геометрической прогрессии. Результат этих выкладок согласуется, как нетрудно видеть, с разложением бинома $(1 - s)^{-1}$.

2.2 Последовательность Фибоначчи

Знаменитая *последовательность Фибоначчи* определяется своими начальными членами $f_0 = f_1 = 1$ и соотношением

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \tag{2.4}$$

Из этого соотношения легко получить начало последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$$

в которой каждый член, начиная с f_2, равен сумме двух предыдущих. Чтобы вывести формулу производящей функции

$$\mathrm{Fib}(s) = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \dots, \tag{2.5}$$

умножим обе части равенства (2.5) на $s + s^2$. Получим

$$\begin{array}{rcccccccccccl} (s+s^2)\,\mathrm{Fib}(s) & = & s & + & s^2 & + & 2s^3 & + & 3s^4 & + & 5s^5 & + \dots \\ & & & + & s^2 & + & s^3 & + & 2s^4 & + & 3s^5 & + \dots \\ & = & s & + & 2s^2 & + & 3s^3 & + & 5s^4 & + & 8s^5 & + \dots, \end{array}$$

или

$$(s + s^2)\,\mathrm{Fib}(s) = \mathrm{Fib}(s) - 1,$$

откуда

$$\mathrm{Fib}(s) = \frac{1}{1 - s - s^2}. \tag{2.6}$$

Полученную формулу можно понимать как композицию двух производящих функций, а именно, $(1 - s)^{-1}$ и $s + s^2$, т.е.

$$\mathrm{Fib}(s) = 1 + (s + s^2) + (s + s^2)^2 + (s + s^2)^3 + \dots\ .$$

Такое разложение, однако, не очень удобно, так как в его членах перемешаны различные степени переменных и оно не дает явной формулы для коэффициентов. Полезнее представить дробь в виде суммы двух элементарных дробей:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-s-s^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s-s_2}-\frac{1}{s-s_1}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s_1\left(1-\frac{s}{s_1}\right)}-\frac{1}{s_2\left(1-\frac{s}{s_2}\right)}\right),\end{aligned}$$

где $s_1=(-1+\sqrt{5})/2,\ s_2=(-1-\sqrt{5})/2$ — корни уравнения $1-s-s^2=0$. Из последнего разложения немедленно получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Fib}(s) &= \frac{1}{\sqrt{5}s_1}\left(1+\frac{s}{s_1}+\frac{s^2}{s_1^2}+\dots\right)-\\ &\quad \frac{1}{\sqrt{5}s_2}\left(1+\frac{s}{s_2}+\frac{s^2}{s_2^2}+\dots\right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(s_1^{-1-n}-s_2^{-1-n})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}(s_1^{n+1}-s_2^{n+1})\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $s_1s_2=-1$.

Число $|1/s_1|=|s_2|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.6180339887$ называется *золотым сечением*. Прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению, можно разрезать на два подобных ему прямоугольника.

Другой способ вывода производящей функции для чисел Фибоначчи использует элементарные понятия линейной алгебры. Рассмотрим пару последовательных чисел Фибоначчи f_n, f_{n+1} как координаты вектора в двумерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Тогда соотношение (2.4) можно интерпретировать как правило перехода от вектора $\binom{f_n}{f_{n+1}}$ к вектору $\binom{f_{n+1}}{f_{n+2}}$:

$$\Phi:\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n+f_{n+1}\end{pmatrix}.$$

Последнее преобразование линейно, и его можно записать в матричном виде:

$$\Phi:\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}\end{pmatrix}.$$

Переход от вектора $\binom{f_{n+1}}{f_{n+2}}$ к вектору $\binom{f_{n+2}}{f_{n+3}}$ осуществляется путем повторного применения преобразования Φ, и т.д. Таким образом, производящая функция для векторной последовательности Фибоначчи принимает вид

$$\begin{aligned}\overline{F}(s) &= \binom{1}{1} + \binom{1}{2}s + \binom{2}{3}s^2 + \binom{3}{5}s^3 + \dots\\ &= \binom{f_0}{f_1} + \Phi\binom{f_0}{f_1}s + \Phi^2\binom{f_0}{f_1}s^2 + \Phi^3\binom{f_0}{f_1}s^3 + \dots\\ &= (I + \Phi s + \Phi^2 s^2 + \Phi^3 s^3 + \dots)\binom{f_0}{f_1}\\ &= (I - s\Phi)^{-1}\binom{f_0}{f_1}.\end{aligned}$$

Здесь через I обозначена единичная матрица, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и мы применили к векторной производящей функции вывод производящей функции для геометрической прогрессии. Единственное отличие в результате: выражение $(I - s\Phi)^{-1}$ понимается как *обратная матрица* к матрице $I - s\Phi$.

Явное выражение для чисел Фибоначчи можно получить, вычислив явно матрицу Φ^n для произвольного n. Для этого матрицу Φ нужно диагонализировать, представив ее в виде

$$\Phi = L^{-1}\widetilde{\Phi}L,$$

где $\widetilde{\Phi}$ — диагональная матрица, а матрица L невырождена. Имеем,

$$\Phi = \frac{1}{s_2^{-1} - s_1^{-1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1^{-1} & s_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 \\ 0 & s_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2^{-1} & -1 \\ -s_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением

$$\Phi^n = L^{-1}\widetilde{\Phi}^n L,$$

и выражениями для чисел s_1, s_2, получаем равенство (2.7).

2.3 Рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции

Последовательность Фибоначчи определяется линейным рекуррентным соотношением $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Исходя из этого соотношения и начальных значений последовательности, мы смогли найти явный вид производящей функции. Производящая функция оказалась рациональной — отношением двух многочленов. На самом деле в нашем выводе нигде не использовался конкретный вид рекуррентного соотношения. Действуя точно таким же образом, мы можем доказать аналогичную теорему о производящей функции для произвольной последовательности, задаваемой линейным рекуррентным соотношением.

Теорема 2.3.1. *Пусть последовательность a_n задается линейным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными $c_1, \dots, c_k$:*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n \tag{2.8}$$

и числа $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ заданы. Тогда производящая функция $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ рациональна, $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, причем степень многочлена Q равна k, а степень многочлена P не превосходит $k-1$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет, по существу, рассуждение для чисел Фибоначчи. Умножив производящую функцию $A(s)$ на $c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_k s^k$, получим

$$\begin{aligned}
(c_1 s + \dots + c_k s^k) A(s) &= c_1 a_0 s + c_1 a_1 s^2 + c_1 a_2 s^3 + \dots + c_1 a_{k-1} s^k + \dots \\
&\qquad + c_2 a_0 s^2 + c_2 a_1 s^3 + \dots + c_2 a_{k-2} s^k + \dots \\
&\qquad\qquad + c_3 a_0 s^3 + \dots + c_3 a_{k-3} s^k + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad \dots \\
&\qquad\qquad\qquad + c_k a_0 s^k + \dots \\
&= P(s) + A(s),
\end{aligned}$$

где P — некоторый многочлен, степень которого не превосходит $k-1$. Действительно, коэффициент при s^{n+k} в правой части первого равенства совпадает с правой частью выражения (2.8). Отсюда непосредственно получаем утверждение теоремы. □

Заметим, что доказательство теоремы 2.3.1 дало нам более сильное утверждение: мы доказали, что многочлен Q имеет вид

$$Q(s) = 1 - c_1 s - c_2 s^2 - \dots - c_k s^k.$$

Вывод векторной производящей функции для последовательности Фибоначчи также непосредственно переносится на случай произвольной рекуррентной последовательности. В общем случае двумерный вектор следует заменить k-мерным вектором

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$

а матрица $\mathbb{A}$ перехода к следующему k-мерному вектору, соответствующая рекуррентному соотношению, будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_k & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Таким образом, мы получаем векторную производящую функцию

$$\overline{A}(s) = (I - s\mathbb{A})^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbb{A}$, вообще говоря, не приводится к диагональному виду линейным преобразованием. Это можно сделать, лишь если ее собственные числа попарно различны. Однако в общем случае ее можно привести к жордановой нормальной форме, степени которой также несложно вычислить.

Оказывается, что рациональные производящие функции в точности совпадают с производящими функциями для последовательностей, задаваемых линейными рекуррентными соотношениями. Точнее, справедлива следующая обратная теорема.

Теорема 2.3.2. *Если производящая функция* $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ *рациональна,* $A(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$*, где многочлены* P *и* Q *взаимно просты, то начиная с некоторого номера* n *последовательность* $a_0, a_1, a_2, \dots$ *задается линейным рекуррентным соотношением*

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n,$$

где k *— степень многочлена* Q*, а* $c_1, c_2, \dots, c_k$ *— некоторые константы.*

Доказательство читателю предлагается провести самостоятельно.

2.4 Произведение Адамара рациональных производящих функций

Одно из наиболее привлекательных свойств рациональных производящих функций — их замкнутость относительно произведения Адамара.

Определение 2.4.1. *Произведением Адамара* производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A \circ B(s) = a_0 b_0 + a_1 b_1 s + a_2 b_2 s^2 + \dots.$$

Таким образом, произведение Адамара двух последовательностей — это последовательность, состоящая из почленных произведений соответственных членов этих последовательностей. Необходимость в производящей функции для произведения Адамара возникает при перечислении пар объектов одинакового порядка: если число объектов первого типа равно a_n, а число объектов второго типа b_n, то число пар объектов, составленных из элементов первого и второго типа, равно $a_n b_n$.

Теорема 2.4.2. *Произведение Адамара двух рациональных производящих функций рационально.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится новая характеризация рациональных производящих функций.

Лемма 2.4.3. *Производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ рациональна тогда и только тогда, когда существуют такие числа $q_1, \ldots, q_l$ и такие многочлены $p_1(n), \ldots, p_l(n)$, что*

$$a_n = p_1(n)q_1^n + \cdots + p_l(n)q_l^n \tag{2.10}$$

Выражение в правой части равенства (2.10) называется *квазимногочленом* от переменной n.

Доказательство. Заметим прежде всего, что производящая функция $(1-qs)^{-k}$ имеет вид

$$(1-qs)^{-k} \quad = \quad 1 - \binom{-k}{1}qs + \binom{-k}{2}q^2s^2 - \binom{-k}{3}q^3s^3 + \ldots$$

Коэффициент при s^n в этой производящей функции равен

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-n+1)}{n!}q^n &= \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}q^n \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!}q^n \\
&= P_{k-1}(n)q^n, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

где $P_{k-1}(n)$ — многочлен от n степени $k-1$. Всякая рациональная функция от переменной s представляется в виде суммы многочлена и линейной комбинации элементарных дробей вида $(1-q_is)^{-k_i}$, поэтому коэффициенты соответствующей производящей функции являются квазимногочленами.

Наоборот, предположим, что коэффициенты производящей функции, начиная с некоторого номера, представляются в виде квазимногочлена. Покажем, что в случае квазимногочлена $p(n)q^n$ соответствующая производящая функция рациональна. Пусть степень многочлена p равна $k-1$. Многочлены $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, определенные равенством (2.11), образуют базис в пространстве многочленов степени не выше $k-1$. Действительно, любая последовательность многочленов степеней $0, 1, \ldots, k-1$ образует базис в этом пространстве. Поэтому многочлен p представляется в виде линейной комбинации многочленов P_i и соответствующая производящая функция есть просто линейная комбинация функций $(1-qs)^{-j}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Для произвольного квазимногочлена мы получаем линейную комбинацию функций такого вида при разных q_i. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2.4.2. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что произведение квазимногочленов является квазимногочленом. Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (2.10). □

2.5 Асимптотика коэффициентов рациональных функций

При решении перечислительных задач зачастую приходится интересоваться поведением числа элементов множества при росте перечисляющего параметра. Это особенно важно, если мы хотим, например, перечислять объекты на компьютере и пытаемся оценить время работы программы.

Определение 2.5.1. Функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *имеют одинаковую асимптотику*, или *одинаковый рост*, при $n\to\infty$, если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ и он равен 1. Функция f *растет медленнее* функции g, если предел $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ существует и он равен 0. В последнем случае говорят также, что функция g *растет быстрее* функции f.

При вычислении асимптотики некоторые функции мы считаем «образцами», а другие «сводим» к этим образцам. В качестве образцов берутся обычно наиболее простые монотонные функции, поведение которых хорошо изучено. Образцами могут служить

- экспонента a^n при различных значениях основания $a>0$;
- степенная функция n^α при различных значениях показателя α;
- факториал $n!$;
- логарифм $\ln n$;

а также произведения и композиции этих функций в различных комбинациях.

Нетрудно расположить функции-образцы в порядке убывания скорости роста:

$$n!;\quad a^n, a>1;\quad n^\alpha, \alpha>0;\quad \ln n;\quad n^\alpha, \alpha<0;\quad a^n, 0<a<1.$$

Пример 2.5.2. Коэффициенты производящей функции $\ln(1-s)^{-1}=s+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}s^3+\dots$ растут, как n^{-1} (в этом случае естественнее было бы говорить «убывают, как n^{-1}»).

Пример 2.5.3. Асимптотика произвольного многочлена $p(n)=c_0n^k+c_1n^{k-1}+\dots+c_n$, $c_0>0$, совпадает с асимптотикой его старшего члена c_0n^k.

В этом разделе мы найдем асимптотику коэффициентов рациональных производящих функций. Согласно лемме 2.4.3, последовательность коэффициентов рациональной производящей функции, начиная с некоторого момента, является квазимногочленом (2.10), в котором $q_1, \ldots, q_l$ — некоторые комплексные числа. Если $|q_i| < |q_j|$, то последовательность $p_i(n)q_i^n$ растет медленнее, чем $p_j(n)q_j^n$ какими бы ни были ненулевые многочлены $p_i(n)$ и $p_j(n)$. Действительно, отношение этих последовательностей

$$\frac{p_i(n)q_i^n}{p_j(n)q_j^n} = \frac{p_i(n)}{p_j(n)}\left(\frac{q_i}{q_j}\right)^n$$

стремится к нулю, поскольку $\left|\frac{q_i}{q_j}\right| < 1$, и n-я степень этого числа стремится к нулю быстрее любой заданной степени числа n. Тем самым, асимптотика квазимногочлена (2.10) определяется слагаемыми, содержащими q_i с самыми большими модулями.

В свою очередь, асимптотика многочлена $p(n)q^n$ определяется старшим мономом многочлена p, поэтому асимптотика любого слагаемого $p_i(n)q_i^n$ в квазимногочлене совпадает с асимптотикой монома $c_i n^{d_i} q_i^n$, где $c_i n^{d_i}$ — старший моном многочлена p_i. Тем самым, мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2.5.4. *Если в квазимногочлене* (2.10) *имеется единственное слагаемое $p_i(n)q_i^n$ с наибольшим по модулю значением q_i и многочленом p_i наибольшей степени, то асимптотика этого квазимногочлена совпадает с асимптотикой монома $|c_i|n^{d_i}|q_i|^n$, где $c_i n^{d_i}$ — старший моном многочлена p_i.*

Если же таких слагаемых несколько, то вопрос об асимптотике становится более тонким. Например, в последовательности, задаваемой квазимногочленом $(-2)^n + 2^n$ (отвечающим значениям $q_1 = -2, q_2 = 2$, $\deg p_1 = \deg p_2 = 0$), все члены с четными номерами равны 0, в то время, как члены с нечетными номерами $n = 2k+1$ растут как $2 \cdot 2^{2k+1}$. Поэтому вопрос об асимптотике таких квазимногочленов требует более аккуратной постановки и более тщательного исследования.

Приведенный пример показывает, что при наличии нескольких значений q_i с наибольшим модулем, степени многочленов при которых совпадают, разные подпоследовательности значений многочлена имеют различную асимптотику. Поэтому речь может идти только об асимптотике «наиболее возрастающих» подпоследовательностей. Это — те подпоследовательности, в которых модули слагаемых суммируются (или почти суммируются). Для таких подпоследовательностей утверждение 2.5.4 принимает вид.

Утверждение 2.5.5. *Если в квазимногочлене* (2.10) *имеется несколько слагаемых $p_i(n)q_i^n$ с наибольшим по модулю значением q_i и многочленом p_i наибольшей степени d, то последовательность значений этого квазимногочлена содержит подпоследовательность, асимптотика которой совпадает с асимптотикой монома $cn^d|q|^n$, где $c = \sum |c_i|$ — сумма модулей старших коэффициентов многочленов p_i, d — их общая степень, $|q|$ — общее значение модулей чисел q_i. Это наибольшая возможная асимптотика подпоследовательности значений квазимногочлена.*

Для квазимногочлена (2.10), отвечающего рациональной функции $\frac{P(s)}{Q(s)}$, постоянные q_i это величины, обратные к корням многочлена Q, т.е. к полюсам рациональной функции. В свою очередь, степень многочлена p_i это уменьшенный на 1 порядок полюса в точке $s = 1/q_i$. Поэтому утверждение 2.5.4 можно переформулировать следующим образом.

Утверждение 2.5.6. *Если у рациональной функции* $\frac{P(s)}{Q(s)}$ *среди ближайших к началу координат полюсов имеется единственный полюс* $1/q$ *наибольшего порядка* k*, то асимптотика ее коэффициентов совпадает с асимптотикой коэффициентов элементарной дроби* $c/(1-qs)^k$ *в разложении этой функции в сумму элементарных дробей.*

Утверждение 2.5.5 допускает аналогичную переформулировку.

В частности, для рациональной функции, задаваемой рекуррентным соотношением (2.8), асимптотика ее коэффициентов определяется ближайшими к началу координат корнями многочлена $Q(s) = 1-c_1s-c_2s^2-\dots-c_ks^k$ и их порядками. Например, для последовательности Фибоначчи $Q(s) = 1-s-s^2$, поэтому ближайший к началу координат корень вещественный, равен $s_1 = (-1+\sqrt{5})/2$ и имеет порядок 1. Значит, числа Фибоначчи имеют асимптотику $c(1/s_1)^n$ для некоторой константы c.

2.6 Задачи

Задача 2.1. Рациональны ли производящие функции для последовательностей
а) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$; б) $2, 6, 12, \dots, (k+1)(k+2), \dots$;
в) $1, 4, 9, 16, \dots, k^2, \dots$; г) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{k^2}, \dots$; д) f_n^2, где f_n — числа Фибоначчи?
Найдите соответствующие производящие функции в тех случаях, когда они рациональны.

Задача 2.2. Найдите представление в виде квазимногочлена и линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами для коэффициентов следующих степенных рядов: а) $\frac{1}{1-s-2s^2}$; б) $\frac{1+2s}{1-3s+4s^3}$; в) $\frac{1+2s}{1-3s^3}$.

Задача 2.3. Известно, что следующие последовательности задаются линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами порядка 3: а) $1, 2, 6, 18, 52, 152, 444, \dots$; б) $1, 2, 2, 6, 8, 16, 28, 48, 88, \dots$ в) $1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, \dots$. Найдите эти соотношения и проверьте, что выписанное начало последовательности действительно им подчиняется.

Задача 2.4. Найдите производящие функции и линейные рекуррентнные соотношения с постоянными коэффициентами для следующих последовательностей, заданных квазимногочленами: а) $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$; б) $b_n = (1+2n) \cdot 2^n + 1 + n + n^2$; в) $c_n = (1 + n + n^2) \cdot 3^n$.

Задача 2.5. Пользуясь производящей функцией для чисел Фибоначчи, докажите для них тождества
а) $f_0 + f_1 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$; б) $f_0 + f_2 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1}$;
в) $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$; г) $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

Задача 2.6. Докажите, что в жордановой нормальной форме матрицы из уравнения (2.9) каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка, размер которой равен кратности этого собственного числа как корня характеристического многочлена. [**Указание:** Воспользуйтесь связью между кратностью собственного числа и порядком соответствующего полюса производящей функции.]

Задача 2.7. Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:
а) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,\ a_0 = a_1 = 1$;
б) $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n,\ a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$;
в) $a_{n+3} = \frac{3}{2}a_{n+2} - \frac{1}{2}a_n,\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

Задача 2.8. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи с четными номерами $\sum_n f_{2n} s^n$.

Задача 2.9. Найдите произведения Адамара функций от s
$(1-qs)^{-1} \circ (1-rs)^{-1}$, $(1-qs)^{-1} \circ (1-qs)^{-1}$, $(1-qs)^{-k} \circ (1-rs)^{-l}$.

Задача 2.10. Найдите производящие функции для последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями а) $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ $(1, 1, 3, 5, 11, \dots)$; б) $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ $(1, 1, 2, 4, 7, \dots$ — «числа Трибоначчи»).

Задача 2.11. Найдите произведение Адамара

$$\frac{1}{1-s-s^2} \circ \frac{1}{1-s-s^2}.$$

Задача 2.12. Докажите, что множество формальных степенных рядов, все коэффициенты которых отличны от 0, образует группу относительно произведения Адамара.

Задача 2.13. Обозначим через a_n число разбиений полоски шириной 1 и длиной n квадратиков на части, каждая из которых является либо квадратиком 1×1, либо домино 1×2. Например, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5$. Найдите производящую функцию для последовательности a_n.

Задача 2.14. Обозначим через b_n число разбиений полоски шириной 2 и длиной n квадратиков на домино 1×2. Например, $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$. Найдите производящую функцию для последовательности b_n.

Задача 2.15. Обозначим через c_n число разбиений полоски шириной 3 и длиной n квадратиков на домино 1×2. Например, $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$. Найдите производящую функцию для последовательности c_n.

Задача 2.16. Обозначим через d_n число разбиений стоимости n полоски шириной 2 и длиной несколько квадратиков на домино 1×2. Здесь стоимость замощения равна $h + 2v$, где h — количество горизонтальных, а v — количество вертикальных доминошек в замощении. Например, $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 2, d_3 = 0, d_4 = 4$. Найдите производящую функцию для последовательности d_n.

Задача 2.17. Обозначим через t_n число разбиений полоски шириной 1 и длиной n квадратиков на части, каждая из которых является либо квадратиком 1×1, либо домино 1×2, либо тримино 1×3. Например, $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 4, t_4 = 7$. Найдите производящую функцию для последовательности t_n.

Задача 2.18. Найдите производящую функцию для лесенок площадью n клеток на клетчатой плоскости, состоящих из не более, чем а) двух ступенек; б) трех ступенек.

Задача 2.19. *Преобразованием Пфаффа* последовательности $\{a_n\}, n = 1, 2, \ldots,$ называется последовательность $p_n = \mathrm{Pf}(\{a_n\})$, состоящая из пфаффианов

$$p_n = \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{2k-1} \\ -a_1 & 0 & a_1 & \ldots & a_{2k-2} \\ & & & \ddots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ -a_{2k-1} & -a_{2k-2} & -a_{2k-3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

(*пфаффиан кососимметрической матрицы* равен квадратному корню из ее определителя). Например, первые члены преобразования Пфаффа последовательности степеней двойки $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$ равны

$$\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \mathrm{Pf}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Докажите, что преобразование Пфаффа переводит а) последовательность $\{2^{n-1}\}$ в последовательность единиц $1, 1, 1, \ldots$; б) последовательность $\{3^{n-1}\}$ в последовательность единиц $1, 1, 1, \ldots$; в) последовательность Фибоначчи Fib_n в последовательность степеней двойки $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$.

Найдите преобразование Пфаффа последовательностей г) J_n и д) T_n из предыдущей задачи.

Задача 2.20. Полимино это область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток. (Два полимино одинаковы, если одно можно получить из другого сдвигом.) Полимино называется *стековым*, если нижние горизонтальные отрезки его границы образуют один отрезок (см. рис. 2.6). Докажите, что число стековых полимино с периметром $2n + 2$ равно Fib_{2n-2}. На рис. 2.6 изображены все 5 стековых полимино с периметром 6 ($n = 2$).

Рис. 2.1: а) Полимино и б) стековое полимино

Рис. 2.2: Стековые полимино с периметром 8.

Задача 2.21. (Фибоначчиева система счисления) Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде $a_1f_1+a_2f_2+\dots$, где f_n — числа Фибоначчи, а каждое из чисел a_i равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два идущих подряд элемента последовательности a_i не могут равняться единице. Придумайте алгоритмы перевода чисел из фибоначчиевой системы счисления в позиционную и обратно, а также алгоритмы сложения и умножения чисел в этой системе счисления.

Задача 2.22. Пусть

$$A(s) = \frac{P_1(s)}{Q_1(s)}, \quad B(s) = \frac{P_2(s)}{Q_2(s)}$$

рациональные производящие функции, заданные несократимыми дробями, и

$$A \circ B(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

их произведение Адамара, представленное в виде несократимой дроби. Что можно сказать про многочлен Q, если многочлены Q_1 и Q_2 известны?

Задача 2.23. Сколько цифр в десятичной записи числа Фибоначчи с номером а) 100; б) 1000?

Задача 2.24. Какую наибольшую асимптотику может иметь подпоследовательность последовательности коэффициентов производящей функции

$$\frac{1}{1-x+2x^2}?$$