Глава 11

Языки и формальные грамматики с однозначным выводом

Конечные автоматы — удобное средство для проверки принадлежности данного слова данному языку. Однако они непригодны для выписывания всех слов данного языка. Для этого предназначены формальные грамматики. Формальные грамматики с однозначным выводом являются замечательным инструментом для подсчета всех слов данной длины в языке, т.е. для решения перечислительных задач.

11.1 Правила вывода в языке Дика

Выписывание всех скобочных структур данной длины — трудоемкий процесс. Чтобы не пропустить ни одной структуры и не повторить никакую структуру дважды, этот процесс надо упорядочить. Один из способов добиться упорядочения состоит в том, чтобы рассмотреть два *правила вывода в языке Дика*:

$$\begin{array}{lccl} 1) & r & \longrightarrow & \lambda; \\ 2) & r & \longrightarrow & arbr. \end{array} \tag{11.1}$$

Здесь r — буква, не входящая в алфавит $\{a, b\}$. Вместо нее мы могли бы выбрать любую букву, отличную от a и b.

Стрелка в правилах вывода (11.1) заменяет фразу:

если в слове есть буква r, то эту букву можно заменить на слово, стоящее справа от стрелки.

Покажем, как работают правила вывода: выведем по этим правилам заданную скобочную структуру.

Пусть нам нужно вывести слово $aabaabbb$. Вот, как выглядит вывод:

$$\underline{r} \xrightarrow{2)} arb\underline{r} \xrightarrow{1)} a\underline{r}b \xrightarrow{2)} aa\underline{r}brb \xrightarrow{1)} aab\underline{r}b \xrightarrow{2)} aaba\underline{r}brb \xrightarrow{1)}$$

$$aaba\underline{r}bb \xrightarrow{2)} aabaa\underline{r}b\underline{r}bb \xrightarrow{1),1)} aabaabbb$$

Над каждой стрелкой в процессе вывода написан номер примененного правила. Буква r, к которой применялось правило, подчеркнута.

Правила вывода в языке Дика можно понимать следующим образом:

Всякое слово в языке Дика есть либо

1) *пустое слово,*

либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

Ясно, что для каждого слова языка Дика такое представление единственно.

Характеристикой числа слов в языке является его производящая функция.

Определение 11.1.1. *Производящей функцией* языка L называется производящая функция

$$L(s) = l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots,$$

где l_k есть число слов длины k в языке L.

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели выпишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$\mathcal{D}(a,b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \dots. \tag{11.2}$$

Теорема 11.1.2. *Ряд* (11.2) *удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{D}(a,b) = \lambda + a\mathcal{D}(a,b)b\mathcal{D}(a,b). \tag{11.3}$$

Доказательство. Действительно, в левой части равенства (11.3) записана сумма всех слов языка Дика. Равенство означает справедливость утверждения

Всякое слово в языке Дика есть либо

1) *пустое слово,*

либо

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

При этом такое представление единственно. Теорема доказана. □

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку $a = s,\ b = s,\ \lambda = s^0 = 1$. Уравнение (11.3) примет вид

$$\mathcal{D}(s,s) = 1 + s^2\mathcal{D}(s,s).$$

Отсюда, обозначив $\mathcal{D}(s,s)$ через $d(s)$, получим

$$d(s) = 1 + s^2 d^2(s). \tag{11.4}$$

Решение

$$d(s) = \frac{1 - \sqrt{1-4s^2}}{2s^2}$$

этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана (3.3). Необходимость подстановки переменной s^2 вместо s объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из n пар скобок, равна $2n$, тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу *пар* скобок.

11.2 Формальные грамматики с однозначным выводом

Приведем обобщение рассуждения из предыдущего раздела.

Определение 11.2.1. Слово $w = \beta_1 \dots \beta_m$ языка L называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово $\beta_i\beta_{i+1}\dots\beta_{i+l}$, $1 \le i, i+l \le m,\ l \ge 0$, отличное от самого слова w, не принадлежит языку L.

В частности, пустое слово в любом языке неразложимо. Предположим, что язык L обладает следующими свойствами

1) пустое слово входит в язык L;
2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;
3) если между любыми двумя буквами любого слова языка L вставить слово языка L, то получится слово языка L; (11.5)
4) если из любого слова языка L выкинуть подслово, входящее в язык L, то получится слово языка L.

Обозначим через $n(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \dots$ производящую функцию для числа неразложимых слов языка L, через $l(s) = l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots$ — производящую функцию для языка L.

Теорема 11.2.2. *Производящая функция для языка L, удовлетворяющего условиям* (11.5), *и производящая функция для подъязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(s) = n(sl(s)). \tag{11.6}$$

Воспользовавшись теоремой Лагранжа, мы заключаем, что производящая функция для числа неразложимых слов в языке, удовлетворяющем условиям (11.5), и производящая функция самого языка восстанавливаются друг по другу. Более того, та же теорема дает явное выражение коэффициентов одной из этих функций через коэффициенты другой.

Доказательство. Каждому неразложимому слову $\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_m}$ в языке L сопоставим правило вывода

$$r \longrightarrow \alpha_{i_1} r \alpha_{i_2} r \dots \alpha_{i_m} r.$$

Ясно, что каждое слово языка допускает вывод по этим правилам. Такой вывод однозначен. Действительно, пусть $\beta_1\dots\beta_k$ —произвольное слово языка L. Если оно неразложимо, то оно представляется в виде правой части правила вывода

$$r \longrightarrow \beta_1 r \beta_2 r \dots \beta_k r,$$

где каждое вхождение символа r следует заменить на пустое слово. Из определения неразложимого слова вытекает, что такое представление единственно.

Предположим теперь, что есть разложимые слова, допускающие различное представление. Рассмотрим самое короткое такое слово w. В нем содержится неразложимое подслово. Выберем из всех неразложимых подслов слова w самое правое (это возможно, так как неразложимые подслова не могут пересекаться) и выкинем его из слова w. Получим новое слово w'. Это слово имеет те же самые представления в виде правых частей правил вывода, что и слово w. Поэтому w' — более короткое слово, допускающее несколько различных представлений. Полученное противоречие доказывает единственность представления.

Таким образом, некоммутативная производящая функция для языка L удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(a_1,\dots,a_m) = \lambda + \alpha_{11}\mathcal{L}(a_1,\dots,a_m)\alpha_{12}\mathcal{L}(a_1,\dots,a_m)\dots + \dots .$$

Делая подстановку $\lambda = 1,\ a_i = t$ и учитывая, что $l(t) = \mathcal{L}(t,t,\dots,t)$, получаем заключение теоремы. □

Пример 11.2.3. Для языка Дика $n(t) = 1 + t^2$. Неразложимые слова — это λ и ab. Отсюда немедленно получаем уравнение (11.4) на производящую функцию для языка Дика.

Одного символа зачастую бывает недостаточно для построения грамматики. Дадим формальное определение грамматики.

Определение 11.2.4. Пусть $R = \{r_1, \dots, r_l\}$ — конечное множество символов, не входящих в алфавит A. *Правилом вывода* называется запись вида

$$r_i \longrightarrow w,$$

где $r_i \in R$, а w — слово в алфавите $A \sqcup R$. Множество Γ (конечное или бесконечное) правил вывода

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \longrightarrow & w_{11} \\ r_1 & \longrightarrow & w_{12} \\ & \dots & \\ r_l & \longrightarrow & w_{l1} \\ r_l & \longrightarrow & w_{l2} \\ & \dots & \end{array}$$

называется (*контекстно свободной*) *грамматикой* (над алфавитом A). Слово в алфавите A *порождается* символом r_i, если оно может быть получено цепочкой подстановок, задаваемых грамматикой, из символа r_i. Язык L_i *порождается* символом r_i, если все слова языка L_i и только они порождаются символом r_i. Грамматика Γ является *грамматикой с однозначным выводом*, если каждое слово, выводимое из символа r_i, единственным образом представляется в виде правой части одного из правил вывода $r_i \longrightarrow w_{ik}$.

В связи с задачами перечисления наибольший интерес для нас представляют формальные грамматики с однозначным выводом. Такая грамматика была построена для языка Дика. Приведем еще один подобный пример.

Пример 11.2.5. Рассмотрим язык $\mathcal{F}$ из примера 10.1.2. Вот возможная грамматика для этого языка:

$$\begin{array}{ccl} r_1 & \longrightarrow & \lambda \\ r_1 & \longrightarrow & b \\ r_1 & \longrightarrow & r_2 b \\ r_1 & \longrightarrow & r_2 \\ r_2 & \longrightarrow & r_1 a \end{array}$$

Язык $\mathcal{F}$ выводится из символа r_1. Из символа r_2 выводится подъязык языка $\mathcal{F}$, состоящий из слов, кончающихся на a.

Приведенная грамматика читается так:

1. Всякое слово языка $\mathcal{F}$ есть либо пустое слово, либо слово b, либо слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a, к которому приписана буква b, либо слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a;

2. всякое слово языка $\mathcal{F}$, кончающееся на a, есть некоторое слово языка $\mathcal{F}$, к которому приписана буква a.

Теорема 11.2.6. *Пусть Γ — грамматика с однозначным выводом для языка L. Обозначим через $r_i(s)$ производящую функцию для числа слов в языке*

L, выводимых из символа r_i (т.е. производящую функцию для подъязыка L_i). Тогда производящие функции r_i удовлетворяют системе уравнений

$$r_i(s) = \sum_j s^{\nu_{ij}} \prod_k r_k^{\eta_{kj}}(s).$$

В частности, если число правил вывода конечно, то функции r_i удовлетворяют системе полиномиальных уравнений и поэтому являются *алгебраическими функциями.*

Доказательство. Поступим, как и в ситуации с одним порождающим символом, — введем некоммутативные производящие степенные ряды для числа слов, порождаемых каждым из символов r_i. Ввиду однозначности представления каждого слова в виде правой части правила вывода получаем систему уравнений на некоммутативные ряды. Делая подстановку $\lambda = s^0 = 1,\ a_i = s$ при $i = 1, \dots, m$, получаем систему уравнений на производящие функции для числа слов. Теорема доказана. □

11.3 Представления производящих функций в виде непрерывных дробей

Производящая функция для чисел Каталана удовлетворяет квадратному уравнению (3.2)

$$s^2 \operatorname{Cat}^2(s) - \operatorname{Cat}(s) + 1 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\operatorname{Cat}(s) - s^2 \operatorname{Cat}^2(s) = 1,$$

или

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1}{1 - s^2 \operatorname{Cat}(s)}. \tag{11.7}$$

Подставив выражение для $\operatorname{Cat}(s)$ из левой части равенства (11.7) в правую часть того же равенства, получим

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2 \operatorname{Cat}(s)}}.$$

Подставляя вновь выражение (11.7) для $\operatorname{Cat}(s)$ в получившееся равенство и продолжая этот процесс, мы получаем представление для функции Каталана в виде *непрерывной дроби*:

$$\operatorname{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - \dots}}}. \tag{11.8}$$

Полученное разложение нужно понимать следующим образом. Если мы оборвем непрерывную дробь на n-м шаге (оставив вместо нее конечную непрерывную дробь, которая представляет собой рациональную функцию), то коэффициенты разложения полученной функции по степеням s будут совпадать с коэффициентами разложения функции $\mathrm{Cat}(s)$ вплоть до члена s^{2n}. Заметим, что из-за наличия множителя s^2 в числителе очередной дроби, присоединяемой на $(n+1)$-м шаге, увеличение числа членов в непрерывной дроби не приводит к изменению первых n коэффициентов в ее разложении. Например,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-s^2} &= \mathbf{1}+\mathbf{s^2}+s^4+s^6+s^8+\dots\\
\frac{1}{1-\frac{s^2}{1-s^2}} &= \mathbf{1}+\mathbf{s^2}+\mathbf{2s^4}+4s^6+8s^8+\dots\\
\frac{1}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-s^2}}} &= \mathbf{1}+\mathbf{s^2}+\mathbf{2s^4}+\mathbf{5s^6}+13s^8+\dots\\
\frac{1}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-s^2}}}} &= \mathbf{1}+\mathbf{s^2}+\mathbf{2s^4}+\mathbf{5s^6}+\mathbf{14s^8}+\dots
\end{aligned}$$

Стабилизирующаяся часть разложения выделена.

Представление функции Каталана в виде непрерывной дроби тесно связано с двумя способами ее получения — перечислением путей по треугольнику Дика (раздел 3.3) и с помощью производящей грамматики (раздел 11.1). Подобное представление можно распространить и на другие функции, перечисляющие различные пути.

Вспомним треугольник Дика с кратностями (рис. 4.5), в основании которого лежат числа Эйлера. Сейчас мы построим непрерывную дробь, отвечающую этому треугольнику.

Теорема 11.3.1. *Производящая функция*

$$F_0(s)=1+s^2+5s^4+61s^6+1385s^8+\dots$$

для нижней стороны треугольника с рис. 4.5 *представляется в виде непрерывной дроби*

$$F_0(s)=\frac{1}{1-\frac{1^2s^2}{1-\frac{2^2s^2}{1-\frac{3^2s^2}{1-\dots}}}}.$$

Доказательство. Производящая функция $F_0(s)$ перечисляет различные пути с началом и концом на высоте 0. Обозначим через $F_i(s)$ производящую функцию, перечисляющую пути с началом и концом на высоте i, которые не опускаются ниже уровня i, по их длине. Тогда

$$F_0(s)=\frac{1}{1-s^2F_1(s)}.$$

Действительно, каждый путь с началом и концом на высоте 0 единственным образом разбивается на такие участки, что

1. концы пути на каждом участке лежат на высоте 0;

2. высота всех промежуточных точек пути на каждом участке больше нуля.

Если отбросить начальный и конечный отрезок такого участка, то мы получим путь, начинающийся и заканчивающийся на высоте 1.

Аналогично,

$$F_1(s) = \frac{1}{1 - 4s^2 F_2(s)}.$$

Появление четверки в коэффициенте при s^2 объясняется тем, что к данному пути, начало и конец которого лежат на высоте 2, начальный и конечный векторы, превращающие его в путь на высоте 1, можно добавить четырьмя «различными» способами.

Продолжая это рассуждение, мы заключаем, что

$$F_k(s) = \frac{1}{1 - (k+1)^2 s^2 F_{k+1}(s)},$$

и непрерывная дробь теперь выписывается очевидным образом:

$$\begin{aligned} F_0(s) &= \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - 4s^2 F_2(s)}} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{4s^2}{1 - \frac{9s^2}{1 - \dots}}}}. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает, что распределение кратностей по восходящему и нисходящему векторам пути в каждом слое не имеет значения. Необходимо лишь, чтобы произведение этих кратностей внутри каждого слоя было постоянным. Например, треугольник, изображенный на рис. 11.1, порождает ту же производящую функцию для путей с нулевой высотой начала и конца, что и треугольник с рис. 4.5 а). Заметим, что то же справедливо и для путей на других высотах.

Конечно, доказательство теоремы обобщается на произвольную расстановку кратностей. Более того, его можно без труда перенести и на треугольник Моцкина (рис. 11.2).

Теорема 11.3.2. *Пусть через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ обозначены кратности векторов $(1,1)$, $(1,-1)$ и $(1,0)$ соответственно в i-м слое взвешенного треугольника Моцкина. Тогда производящая функция $F_k(s)$ для путей с началом и концом на высоте k, не опускающихся ниже этой высоты, представляется в виде непрерывной дроби*

$$F_k(s) = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}{1 - \gamma_k s - \frac{\alpha_k \beta_k s^2}{1 - \gamma_{k+1} s - \frac{\alpha_{k+1}\beta_{k+1} s^2}{1 - \dots}}}.$$

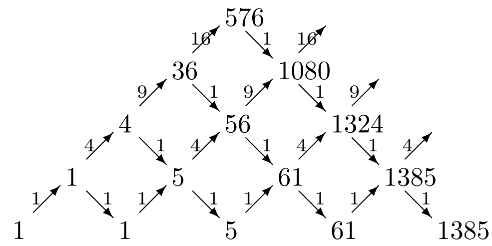

Рис. 11.1: Другая расстановка кратностей в треугольнике Дика

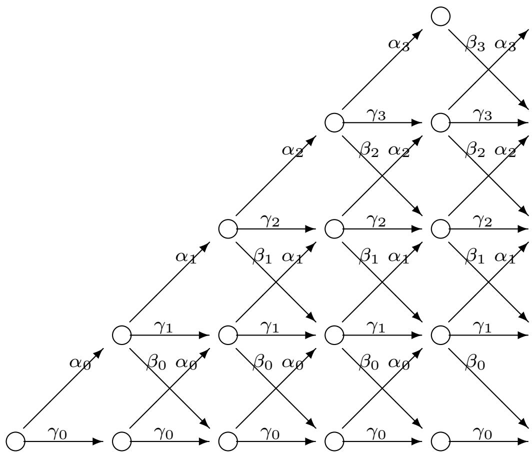

Рис. 11.2: Треугольник Моцкина с кратностями

Доказательство. Конечно, эта теорема доказывается так же, как и ее частный случай теорема 11.3.1. Мы, однако, хотим изложить то же самое доказательство на языке формальных грамматик. Сопоставим векторам $(1,1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$ в i-м слое буквы a_i, b_i, c_i соответственно. Мы будем рассматривать языки $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots$ в алфавите из бесконечного набора букв $\{a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, \ldots,\}$. Язык $\mathcal{F}_k$ состоит из слов, отвечающих путям с началом и концом на высоте k, не опускающимся ниже этой высоты.

Грамматика

$$\begin{array}{lcl}
r_0 & \longrightarrow & \lambda \\
r_0 & \longrightarrow & c_0 r_0 \\
r_0 & \longrightarrow & a_0 r_1 b_0 r_0 \\
r_1 & \longrightarrow & \lambda \\
r_1 & \longrightarrow & c_1 r_1 \\
r_1 & \longrightarrow & a_1 r_2 b_1 r_1 \\
 & \ldots &
\end{array}$$

является грамматикой с однозначным выводом. Буква r_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ порождает язык $\mathcal{F}_k$. Поэтому некоммутативные производящие функции для языков $\mathcal{F}_k$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{F}_0 & = & \lambda + c_0\mathcal{F}_0 + a_0\mathcal{F}_1 b_0\mathcal{F}_0 \\
\mathcal{F}_1 & = & \lambda + c_1\mathcal{F}_1 + a_1\mathcal{F}_2 b_1\mathcal{F}_1 \\
 & & \ldots
\end{array}$$

Подставляя $\lambda = 1$, $a_i = \alpha_i s$, $b_i = \beta_i s$, $c_i = \gamma_i s$, получаем систему уравнений на коммутативные производящие функции

$$\begin{array}{rcl}
F_0(s) & = & 1 + \gamma_0 s F_0(s) + \alpha_0\beta_0 s^2 F_0(s) F_1(s) \\
F_1(s) & = & 1 + \gamma_1 s F_1(s) + \alpha_1\beta_1 s^2 F_1(s) F_2(s) \\
 & & \ldots
\end{array}$$

откуда

$$\begin{array}{rcl}
F_0(s) & = & \dfrac{1}{1 - \gamma_0 s - \alpha_0\beta_0 s^2 F_1(s)} \\
 & = & \dfrac{1}{1 - \gamma_0 s - \frac{\alpha_0\beta_0 s^2}{1 - \gamma_1 s - \alpha_1\beta_1 s^2 F_2(s)}} \\
 & = & \ldots
\end{array}$$

Вывод формул для остальных F_k аналогичен, и теорема доказана.

11.4 Задачи

Задача 11.1. Докажите, что грамматика из примера 11.2.5 действительно описывает язык $\mathcal{F}$ из примера 10.1.2 и что вывод в ней однозначен. Воспользовавшись этой грамматикой, найдите производящую функцию для языка $\mathcal{F}$.

Задача 11.2. Придумайте для языка $\mathcal{F}$ порождающую грамматику с одним порождающим символом и однозначным выводом.

Задача 11.3. Напишите правила вывода для языка правильных скобочных структур из двух пар скобок (круглых и квадратных) и выведите производящую функцию для него. Этот язык называется *языком Дика второго порядка*. Обобщите результат на языки Дика произвольного порядка.

Задача 11.4. Задайте с помощью формальных грамматик языки систем путей из задач 3.5, 3.11; выведите отсюда соответствующие производящие функции.

Задача 11.5. *Языком Моцкина* называется язык в алфавите $\{a, b, c\}$, состоящий из таких слов, что зачеркивание всех букв c в них дает слово из языка Дика. Слова в языке Моцкина находятся во взаимно однозначном соответствии с путями Моцкина из задачи 3.3. Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию для этого языка.

Задача 11.6. Постройте грамматику для языка натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления.

Задача 11.7. Постройте грамматику для языка правильных арифметических выражений в двоичной системе счисления в алфавите $\{(,), +, 1, 0\}$.

Задача 11.8. Постройте грамматики для языков а) $\mathcal{L}_1 = \{a^{3i}b^i | i \geq 0\}$;
б) $\mathcal{L}_2 = \{a^i b^j | i \geq j \geq 0\}$; в) $\mathcal{L}_3 = \{w|$число вхождений буквы a в слово w равно числу вхождений буквы b в это слово$\}$;
г) $\mathcal{L}_4 = \{w|$число вхождений буквы a в слово w вдвое больше числа вхождений буквы $b\}$;
д) $\mathcal{L}_5 =$ множество палиндромов в алфавите из трех букв. (*Палиндромом* называется слово, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

Найдите производящие функции для этих языков.

Задача 11.9. Найдите производящие функции для языков из двух букв, слова которых не содержат
а) подслова ba; б) подслова $aabb$; в) подслова aba;
г) подслов $aabab, ababa$.

Задача 11.10. Обозначим через $a_{n,k}$ число путей в треугольнике Дика, состоящих из n звеньев, площадь под которыми равна k; $a_{2,1} = 1$, $a_{2,k} = 0$ при k четном. Докажите, что

$$A(s,t) = \sum a_{n,k} s^n t^k = \frac{1}{1 - \frac{s^2 t}{1 - \frac{s^2 t^3}{1 - \frac{s^2 t^5}{1 - \dots}}}}.$$

Задача 11.11. Докажите справедливость следующих разложений в непрерывные дроби:

- а)
$$B(s) = \frac{s}{1 - \frac{1\cdot 2s^2}{1 - \frac{2\cdot 3 \cdots ^2}{1 - \dots - \frac{k(k+1)s^2}{1 - \dots}}}},$$
где $B(s)$ — производящая функция для стороны Бернулли треугольника Бернулли–Эйлера;

- б)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n-1)!!s^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{2s^2}{1 - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}},$$
где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$;

- в)
$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{s^2}{1 - s - \frac{2s^2}{1 - s - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}},$$
где I_n — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из n элементов, $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$, $I_4 = 10$, $\dots$;

- г)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!s^n = \frac{1}{1 - 2s - \frac{1\cdot 2s^2}{1 - 4s - \frac{2\cdot 3s^2}{1 - 6s - \frac{3\cdot 4s^2}{1 - \dots}}}};$$

- д)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{1^2 s^2}{1 - 3s - \frac{2^2 s^2}{1 - 5s - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}.$$

Задача 11.12. Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите $0, 1$, состоящего из слов с четным числом нулей и найдите производящую функцию для этого языка.

Задача 11.13. Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите $0, 1, 2$, состоящего из слов с четным числом нулей и четным числом единиц и найдите производящую функцию для этого языка.