



## Глава 11

# Языки и формальные грамматики с однозначным выводом

Конечные автоматы — удобное средство для проверки принадлежности данного слова данному языку. Однако они непригодны для выписывания всех слов данного языка. Для этого предназначены формальные грамматики. Формальные грамматики с однозначным выводом являются замечательным инструментом для подсчета всех слов данной длины в языке, т.е. для решения перечислительных задач.

### 11.1 Правила вывода в языке Дика

Выписывание всех скобочных структур данной длины — трудоемкий процесс. Чтобы не пропустить ни одной структуры и не повторить никакую структуру дважды, этот процесс надо упорядочить. Один из способов добиться упорядочения состоит в том, чтобы рассмотреть два *правила вывода в языке Дика*:

$$\begin{array}{l} 1) \quad r \longrightarrow \lambda; \\ 2) \quad r \longrightarrow arbr. \end{array} \quad (11.1)$$

Здесь  $r$  — буква, не входящая в алфавит  $\{a, b\}$ . Вместо нее мы могли бы выбрать любую букву, отличную от  $a$  и  $b$ .

Стрелка в правилах вывода (11.1) заменяет фразу:

*если в слове есть буква  $r$ , то эту букву можно заменить на слово, стоящее справа от стрелки.*

Покажем, как работают правила вывода: выведем по этим правилам заданную скобочную структуру.

Пусть нам нужно вывести слово  $aabaabbb$ . Вот, как выглядит вывод:

$$\begin{aligned} r &\xrightarrow{2)} ar\bar{b}r \xrightarrow{1)} a\bar{r}b \xrightarrow{2)} aa\bar{r}brb \xrightarrow{1)} aab\bar{r}b \xrightarrow{2)} aaba\bar{r}brb \xrightarrow{1)} \\ & aaba\bar{r}bb \xrightarrow{2)} aabaar\bar{b}rbb \xrightarrow{1),1)} aabaabbb \end{aligned}$$

Над каждой стрелкой в процессе вывода написан номер примененного правила. Буква  $r$ , к которой применялось правило, подчеркнута.

Правила вывода в языке Дика можно понимать следующим образом:

*Всякое слово в языке Дика есть либо*

1) *пустое слово,*

*либо*

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

Ясно, что для каждого слова языка Дика такое представление единственно.

Характеристикой числа слов в языке является его производящая функция.

**Определение 11.1.1.** *Производящей функцией языка  $L$  называется производящая функция*

$$L(s) = l_0 + l_1s + l_2s^2 + \dots,$$

где  $l_k$  есть число слов длины  $k$  в языке  $L$ .

Вычислим с помощью правил вывода производящую функцию для языка Дика. Для этой цели выпишем «некоммутативный производящий ряд», перечисляющий слова языка. Этот ряд представляет собой просто формальную сумму всех слов языка, выписанных в порядке возрастания длины:

$$\mathcal{D}(a, b) = \lambda + ab + aabb + abab + aaabbb + aababb + \dots \quad (11.2)$$

**Теорема 11.1.2.** *Ряд (11.2) удовлетворяет уравнению*

$$\mathcal{D}(a, b) = \lambda + a\mathcal{D}(a, b)b\mathcal{D}(a, b). \quad (11.3)$$

**Доказательство.** Действительно, в левой части равенства (11.3) записана сумма всех слов языка Дика. Равенство означает справедливость утверждения

*Всякое слово в языке Дика есть либо*

1) *пустое слово,*

*либо*

2) *слово, в котором внутри самой левой пары соответственных скобок стоит некоторое слово языка Дика и после этой пары стоит слово языка Дика.*

При этом такое представление единственно. Теорема доказана.  $\square$

Чтобы перейти от некоммутативного производящего ряда к обычному, сделаем подстановку  $a = s$ ,  $b = s$ ,  $\lambda = s^0 = 1$ . Уравнение (11.3) примет вид

$$\mathcal{D}(s, s) = 1 + s^2 \mathcal{D}(s, s).$$

Отсюда, обозначив  $\mathcal{D}(s, s)$  через  $d(s)$ , получим

$$d(s) = 1 + s^2 d^2(s). \quad (11.4)$$

Решение

$$d(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s^2}}{2s^2}$$

этого уравнения, конечно же, совпадает (с точностью до возведения формальной переменной в квадрат) с производящей функцией для чисел Каталана (3.3). Необходимость подстановки переменной  $s^2$  вместо  $s$  объясняется тем, что в языке Дика длина слова, составленного из  $n$  пар скобок, равна  $2n$ , тогда как ранее мы перечисляли эти слова по числу *пар* скобок.

## 11.2 Формальные грамматики с однозначным выводом

Приведем обобщение рассуждения из предыдущего раздела.

**Определение 11.2.1.** Слово  $w = \beta_1 \dots \beta_m$  языка  $L$  называется *неразложимым* в этом языке, если никакое его непустое подслово  $\beta_i \beta_{i+1} \dots \beta_{i+l}$ ,  $1 \leq i, i+l \leq m$ ,  $l \geq 0$ , отличное от самого слова  $w$ , не принадлежит языку  $L$ .

В частности, пустое слово в любом языке неразложимо. Предположим, что язык  $L$  обладает следующими свойствами

- 1) пустое слово входит в язык  $L$ ;
- 2) начало всякого неразложимого слова не совпадает с концом другого или того же самого неразложимого слова;
- 3) если между любыми двумя буквами  
любого слова языка  $L$  вставить слово языка  $L$ ,  
то получится слово языка  $L$ ;
- 4) если из любого слова языка  $L$  выкинуть подслово,  
входящее в язык  $L$ , то получится слово языка  $L$ .

Обозначим через  $n(t) = n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \dots$  производящую функцию для числа неразложимых слов языка  $L$ , через  $l(s) = l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \dots$  — производящую функцию для языка  $L$ .

**Теорема 11.2.2.** *Производящая функция для языка  $L$ , удовлетворяющего условиям (11.5), и производящая функция для подязыка неразложимых слов в нем связаны между собой уравнением Лагранжа*

$$l(s) = n(sl(s)). \quad (11.6)$$

Воспользовавшись теоремой Лагранжа, мы заключаем, что производящая функция для числа неразложимых слов в языке, удовлетворяющем условиям (11.5), и производящая функция самого языка восстанавливаются друг по другу. Более того, та же теорема дает явное выражение коэффициентов одной из этих функций через коэффициенты другой.

**Доказательство.** Каждому неразложимому слову  $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m}$  в языке  $L$  сопоставим правило вывода

$$r \longrightarrow \alpha_{i_1} r \alpha_{i_2} r \dots \alpha_{i_m} r.$$

Ясно, что каждое слово языка допускает вывод по этим правилам. Такой вывод однозначен. Действительно, пусть  $\beta_1 \dots \beta_k$  — произвольное слово языка  $L$ . Если оно неразложимо, то оно представляется в виде правой части правила вывода

$$r \longrightarrow \beta_1 r \beta_2 r \dots \beta_k r,$$

где каждое вхождение символа  $r$  следует заменить на пустое слово. Из определения неразложимого слова вытекает, что такое представление единственно.

Предположим теперь, что есть разложимые слова, допускающие различное представление. Рассмотрим самое короткое такое слово  $w$ . В нем содержится неразложимое подслово. Выберем из всех неразложимых подслов слова  $w$  самое правое (это возможно, так как неразложимые подслова не могут пересекаться) и выкинем его из слова  $w$ . Получим новое слово  $w'$ . Это слово имеет те же самые представления в виде правых частей правил вывода, что и слово  $w$ . Поэтому  $w'$  — более короткое слово, допускающее несколько различных представлений. Полученное противоречие доказывает единственность представления.

Таким образом, некоммутативная производящая функция для языка  $L$  удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) = \lambda + \alpha_{11} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \alpha_{12} \mathcal{L}(a_1, \dots, a_m) \dots + \dots$$

Делая подстановку  $\lambda = 1$ ,  $a_i = t$  и учитывая, что  $l(t) = \mathcal{L}(t, t, \dots, t)$ , получаем заключение теоремы.  $\square$

*Пример 11.2.3.* Для языка Дика  $n(t) = 1 + t^2$ . Неразложимые слова — это  $\lambda$  и  $ab$ . Отсюда немедленно получаем уравнение (11.4) на производящую функцию для языка Дика.

Одного символа зачастую бывает недостаточно для построения грамматики. Дадим формальное определение грамматики.

**Определение 11.2.4.** Пусть  $R = \{r_1, \dots, r_l\}$  — конечное множество символов, не входящих в алфавит  $A$ . *Правилом вывода* называется запись вида

$$r_i \longrightarrow w,$$

где  $r_i \in R$ , а  $w$  — слово в алфавите  $A \sqcup R$ . Множество  $\Gamma$  (конечное или бесконечное) правил вывода

$$\begin{array}{l} r_1 \longrightarrow w_{11} \\ r_1 \longrightarrow w_{12} \\ \dots \\ r_l \longrightarrow w_{l1} \\ r_l \longrightarrow w_{l2} \\ \dots \end{array}$$

называется (*контекстно свободной*) *грамматикой* (над алфавитом  $A$ ). Слово в алфавите  $A$  *порождается* символом  $r_i$ , если оно может быть получено цепочкой подстановок, задаваемых грамматикой, из символа  $r_i$ . Язык  $L_i$  *порождается* символом  $r_i$ , если все слова языка  $L_i$  и только они порождаются символом  $r_i$ . Грамматика  $\Gamma$  является *грамматикой с однозначным выводом*, если каждое слово, выводимое из символа  $r_i$ , единственным образом представляется в виде правой части одного из правил вывода  $r_i \longrightarrow w_{ik}$ .

В связи с задачами перечисления наибольший интерес для нас представляют формальные грамматики с однозначным выводом. Такая грамматика была построена для языка Дика. Приведем еще один подобный пример.

*Пример 11.2.5.* Рассмотрим язык  $\mathcal{F}$  из примера 10.1.2. Вот возможная грамматика для этого языка:

$$\begin{array}{l} r_1 \longrightarrow \lambda \\ r_1 \longrightarrow b \\ r_1 \longrightarrow r_2b \\ r_1 \longrightarrow r_2 \\ r_2 \longrightarrow r_1a \end{array}$$

Язык  $\mathcal{F}$  выводится из символа  $r_1$ . Из символа  $r_2$  выводится подязык языка  $\mathcal{F}$ , состоящий из слов, кончающихся на  $a$ .

Приведенная грамматика читается так:

1. Всякое слово языка  $\mathcal{F}$  есть либо пустое слово, либо слово  $b$ , либо слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ , к которому приписана буква  $b$ , либо слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ ;
2. всякое слово языка  $\mathcal{F}$ , кончающееся на  $a$ , есть некоторое слово языка  $\mathcal{F}$ , к которому приписана буква  $a$ .

**Теорема 11.2.6.** Пусть  $\Gamma$  — грамматика с однозначным выводом для языка  $L$ . Обозначим через  $r_i(s)$  производящую функцию для числа слов в языке

$L$ , выводимых из символа  $r_i$  (т.е. производящую функцию для подязыка  $L_i$ ). Тогда производящие функции  $r_i$  удовлетворяют системе уравнений

$$r_i(s) = \sum_j s^{\nu_{ij}} \prod_k r_k^{\eta_{kj}}(s).$$

В частности, если число правил вывода конечно, то функции  $r_i$  удовлетворяют системе полиномиальных уравнений и поэтому являются *алгебраическими функциями*.

**Доказательство.** Поступим, как и в ситуации с одним порождающим символом, — введем некоммутативные производящие степенные ряды для числа слов, порождаемых каждым из символов  $r_i$ . Ввиду однозначности представления каждого слова в виде правой части правила вывода получаем систему уравнений на некоммутативные ряды. Делая подстановку  $\lambda = s^0 = 1$ ,  $a_i = s$  при  $i = 1, \dots, m$ , получаем систему уравнений на производящие функции для числа слов. Теорема доказана.  $\square$

### 11.3 Представления производящих функций в виде непрерывных дробей

Производящая функция для чисел Каталана удовлетворяет квадратному уравнению (3.2)

$$s^2 \text{Cat}^2(s) - \text{Cat}(s) + 1 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\text{Cat}(s) - s^2 \text{Cat}^2(s) = 1,$$

или

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - s^2 \text{Cat}(s)}. \quad (11.7)$$

Подставив выражение для  $\text{Cat}(s)$  из левой части равенства (11.7) в правую часть того же равенства, получим

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - s^2 \text{Cat}(s)}}.$$

Подставляя вновь выражение (11.7) для  $\text{Cat}(s)$  в получившееся равенство и продолжая этот процесс, мы получаем представление для функции Каталана в виде *непрерывной дроби*:

$$\text{Cat}(s) = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{s^2}{1 - \dots}}}. \quad (11.8)$$

Полученное разложение нужно понимать следующим образом. Если мы оборвем непрерывную дробь на  $n$ -м шаге (оставив вместо нее конечную

непрерывную дробь, которая представляет собой рациональную функцию), то коэффициенты разложения полученной функции по степеням  $s$  будут совпадать с коэффициентами разложения функции  $\text{Cat}(s)$  вплоть до члена  $s^{2n}$ . Заметим, что из-за наличия множителя  $s^2$  в числителе очередной дроби, присоединяемой на  $(n+1)$ -м шаге, увеличение числа членов в непрерывной дроби не приводит к изменению первых  $n$  коэффициентов в ее разложении. Например,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-s^2} &= 1 + s^2 + s^4 + s^6 + s^8 + \dots \\ \frac{1}{1-\frac{s^2}{1-s^2}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 4s^6 + 8s^8 + \dots \\ \frac{1}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-s^2}}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6 + 13s^8 + \dots \\ \frac{1}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-\frac{s^2}{1-s^2}}}} &= 1 + s^2 + 2s^4 + 5s^6 + 14s^8 + \dots\end{aligned}$$

Стабилизирующаяся часть разложения выделена.

Представление функции Каталана в виде непрерывной дроби тесно связано с двумя способами ее получения — перечислением путей по треугольнику Дика (раздел 3.3) и с помощью производящей грамматики (раздел 11.1). Подобное представление можно распространить и на другие функции, перечисляющие различные пути.

Вспомним треугольник Дика с кратностями (рис. 4.5), в основании которого лежат числа Эйлера. Сейчас мы построим непрерывную дробь, отвечающую этому треугольнику.

**Теорема 11.3.1.** *Производящая функция*

$$F_0(s) = 1 + s^2 + 5s^4 + 61s^6 + 1385s^8 + \dots$$

для нижней стороны треугольника с рис. 4.5 представляется в виде непрерывной дроби

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - \frac{1^2 s^2}{1 - \frac{2^2 s^2}{1 - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}$$

**Доказательство.** Производящая функция  $F_0(s)$  перечисляет различные пути с началом и концом на высоте 0. Обозначим через  $F_i(s)$  производящую функцию, перечисляющую пути с началом и концом на высоте  $i$ , которые не опускаются ниже уровня  $i$ , по их длине. Тогда

$$F_0(s) = \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)}.$$

Действительно, каждый путь с началом и концом на высоте 0 единственным образом разбивается на такие участки, что



1. концы пути на каждом участке лежат на высоте 0;
2. высота всех промежуточных точек пути на каждом участке больше нуля.

Если отбросить начальный и конечный отрезок такого участка, то мы получим путь, начинающийся и заканчивающийся на высоте 1.

Аналогично,

$$F_1(s) = \frac{1}{1 - 4s^2 F_2(s)}.$$

Появление четверки в коэффициенте при  $s^2$  объясняется тем, что к данному пути, начало и конец которого лежат на высоте 2, начальный и конечный векторы, превращающие его в путь на высоте 1, можно добавить четырьмя «различными» способами.

Продолжая это рассуждение, мы заключаем, что

$$F_k(s) = \frac{1}{1 - (k+1)^2 s^2 F_{k+1}(s)},$$

и непрерывная дробь теперь выписывается очевидным образом:

$$\begin{aligned} F_0(s) &= \frac{1}{1 - s^2 F_1(s)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - 4s^2 F_2(s)}} \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{4s^2}{1 - \frac{9s^2}{\dots}}}}. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы непосредственно вытекает, что распределение кратностей по восходящему и нисходящему векторам пути в каждом слое не имеет значения. Необходимо лишь, чтобы произведение этих кратностей внутри каждого слоя было постоянным. Например, треугольник, изображенный на рис. 11.1, порождает ту же производящую функцию для путей с нулевой высотой начала и конца, что и треугольник с рис. 4.5 а). Заметим, что то же справедливо и для путей на других высотах.

Конечно, доказательство теоремы обобщается на произвольную расстановку кратностей. Более того, его можно без труда перенести и на треугольник Моцкина (рис. 11.2).

**Теорема 11.3.2.** Пусть через  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  обозначены кратности векторов  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$  и  $(1, 0)$  соответственно в  $i$ -м слое взвешенного треугольника Моцкина. Тогда производящая функция  $F_k(s)$  для путей с началом и концом на высоте  $k$ , не опускающихся ниже этой высоты, представляется в виде непрерывной дроби

$$F_k(s) = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}}{1 - \gamma_k s - \frac{\alpha_k \beta_k s^2}{1 - \gamma_{k+1} s - \frac{\alpha_{k+1} \beta_{k+1} s^2}{1 - \dots}}}.$$



является грамматикой с однозначным выводом. Буква  $r_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  порождает язык  $\mathcal{F}_k$ . Поэтому некоммутативные производящие функции для языков  $\mathcal{F}_k$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \lambda + c_0\mathcal{F}_0 + a_0\mathcal{F}_1b_0\mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 &= \lambda + c_1\mathcal{F}_1 + a_1\mathcal{F}_2b_1\mathcal{F}_1 \\ &\dots\end{aligned}$$

Подставляя  $\lambda = 1$ ,  $a_i = \alpha_i s$ ,  $b_i = \beta_i s$ ,  $c_i = \gamma_i s$ , получаем систему уравнений на коммутативные производящие функции

$$\begin{aligned}F_0(s) &= 1 + \gamma_0 s F_0(s) + \alpha_0 \beta_0 s^2 F_0(s) F_1(s) \\ F_1(s) &= 1 + \gamma_1 s F_1(s) + \alpha_1 \beta_1 s^2 F_1(s) F_2(s) \\ &\dots\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}F_0(s) &= \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \alpha_0 \beta_0 s^2 F_1(s)} \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_0 s - \frac{\alpha_0 \beta_0 s^2}{1 - \gamma_1 s - \alpha_1 \beta_1 s^2 F_2(s)}} \\ &= \dots\end{aligned}$$

Вывод формул для остальных  $F_k$  аналогичен, и теорема доказана.

## 11.4 Задачи

*Задача 11.1.* Докажите, что грамматика из примера 11.2.5 действительно описывает язык  $\mathcal{F}$  из примера 10.1.2 и что вывод в ней однозначен. Воспользовавшись этой грамматикой, найдите производящую функцию для языка  $\mathcal{F}$ .

*Задача 11.2.* Придумайте для языка  $\mathcal{F}$  порождающую грамматику с одним порождающим символом и однозначным выводом.

*Задача 11.3.* Напишите правила вывода для языка правильных скобочных структур из двух пар скобок (круглых и квадратных) и выведите производящую функцию для него. Этот язык называется *языком Дика второго порядка*. Обобщите результат на языки Дика произвольного порядка.

*Задача 11.4.* Задайте с помощью формальных грамматик языки систем путей из задач 3.5, 3.11; выведите отсюда соответствующие производящие функции.

*Задача 11.5.* *Языком Моцкина* называется язык в алфавите  $\{a, b, c\}$ , состоящий из таких слов, что зачеркивание всех букв  $c$  в них дает слово из языка Дика. Слова в языке Моцкина находятся во взаимно однозначном соответствии с путями Моцкина из задачи 3.3. Постройте для языка Моцкина грамматику с однозначным выводом и найдите с ее помощью производящую функцию для этого языка.

*Задача 11.6.* Постройте грамматику для языка натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления.

*Задача 11.7.* Постройте грамматику для языка правильных арифметических выражений в двоичной системе счисления в алфавите  $\{(\cdot), +, 1, 0\}$ .

*Задача 11.8.* Постройте грамматики для языков а)  $\mathcal{L}_1 = \{a^{3i}b^i | i \geq 0\}$ ;  
б)  $\mathcal{L}_2 = \{a^i b^j | i \geq j \geq 0\}$ ; в)  $\mathcal{L}_3 = \{w | \text{число вхождений буквы } a \text{ в слово } w \text{ равно числу вхождений буквы } b \text{ в это слово}\}$ ;

г)  $\mathcal{L}_4 = \{w | \text{число вхождений буквы } a \text{ в слово } w \text{ вдвое больше числа вхождений буквы } b\}$ ;

д)  $\mathcal{L}_5 =$  множество палиндромов в алфавите из трех букв. (*Палиндромом* называется слово, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

Найдите производящие функции для этих языков.

*Задача 11.9.* Найдите производящие функции для языков из двух букв, слова которых не содержат

а) подслова  $ba$ ; б) подслова  $aabb$ ; в) подслова  $aba$ ;

г) подслов  $aabab, ababa$ .

*Задача 11.10.* Обозначим через  $a_{n,k}$  число путей в треугольнике Дика, состоящих из  $n$  звеньев, площадь под которыми равна  $k$ ;  $a_{2,1} = 1$ ,  $a_{2,k} = 0$  при  $k$  четном. Докажите, что

$$A(s, t) = \sum a_{n,k} s^n t^k = \frac{1}{1 - \frac{s^2 t}{1 - \frac{s^2 t^3}{1 - \frac{s^2 t^5}{1 - \dots}}}}$$

*Задача 11.11.* Докажите справедливость следующих разложений в непрерывные дроби:

• а)

$$B(s) = \frac{s}{1 - \frac{1 \cdot 2s^2}{1 - \frac{2 \cdot 3 \cdot s^2}{1 - \dots - \frac{k(k+1)s^2}{1 - \dots}}}}$$

где  $B(s)$  — производящая функция для стороны Бернулли треугольника Бернулли-Эйлера;

• б)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)!! s^{2n} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{1 - \frac{2s^2}{1 - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}}$$

где  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ;

• в)

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{s^2}{1 - s - \frac{2s^2}{1 - s - \frac{3s^2}{1 - \dots}}}}$$

где  $I_n$  — число инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) на множестве из  $n$  элементов,  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 10$ , ...;

• г)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! s^n = \frac{1}{1 - 2s - \frac{1 \cdot 2s^2}{1 - 4s - \frac{2 \cdot 3s^2}{1 - 6s - \frac{3 \cdot 4s^2}{1 - \dots}}}}$$

• д)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! s^n = \frac{1}{1 - s - \frac{1^2 s^2}{1 - 3s - \frac{2^2 s^2}{1 - 5s - \frac{3^2 s^2}{1 - \dots}}}}$$

*Задача 11.12.* Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите  $0, 1$ , состоящего из слов с четным числом нулей и найдите производящую функцию для этого языка.

*Задача 11.13.* Напишите производящую грамматику с однозначным выводом для языка в алфавите  $0, 1, 2$ , состоящего из слов с четным числом нулей и четным числом единиц и найдите производящую функцию для этого языка.