Часть I

Элементы перечислительной комбинаторики

Глава 1

Элементарные производящие функции

Предметом нашего исследования будут задачи перечислительной комбинаторики. Они заключаются в подсчете числа объектов, принадлежащих некоторому семейству конечных множеств. У каждого множества семейства имеется свой номер, и результатом перечисления служит некоторая последовательность натуральных чисел.

Как правило, задача перечислительной комбинаторики «в принципе» разрешима: для каждого множества из семейства можно выписать все его элементы и таким образом узнать их число. Проблема, однако, состоит в том, чтобы найти «хорошее» решение, не требующее выписывания всех элементов изучаемых множеств.

Определить, что такое хорошее решение, довольно трудно. Зачастую можно лишь сравнить два решения и сказать, какое из них лучше.

При решении задач перечислительной комбинаторики очень полезно рассматривать производящие ряды. Операции с комбинаторными объектами очень естественно выражаются в терминах производящих функций. Привлечение методов из смежных областей математики (например, из анализа) дает новый взгляд на перечислительные задачи и позволяет находить неожиданные подходы к их решению.

1.1 Перестановки и сочетания

Будем обозначать число элементов в конечном множестве A через $|A|$; например, $|\{4,5,7\}| = 3$.

Пусть N_n обозначает множество натуральных чисел от 1 до n, т.е. $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Перестановка* этого множества это его взаимно-однозначное отображение в себя, $\sigma : N_n \to N_n$. Множество всех перестановок этого множества обозначается через $\mathcal{S}_n$. Композиция перестановок является перестановкой, и у каждой перестановки есть обратная — такая, композиция с которой является тождественной перестановкой. Поэтому множество $\mathcal{S}_n$ образует группу.

Подсчитаем количество различных перестановок, т.е. количество элементов в группе $\mathcal{S}_n$. Это количество равно количеству различных взаимно-однозначных отображений любых двух множеств из n элементов (не обязательно одинаковых). Подсчитать их можно, например, так. Группа $\mathcal{S}_1$ состоит, очевидно, из одного элемента — тождественного отображения множества $N_1 = \{1\}$ в себя. Разобьем теперь все взаимно-однозначные отображения из N_n в себя на n подмножеств в зависимости от того, в какой элемент перешел элемент 1. Все эти n подмножеств содержат одинаковое количество элементов, и это количество равно количеству взаимно-однозначных отображений двух $(n-1)$-элементных множеств, т.е. числу элементов группы $\mathcal{S}_{n-1}$. Поэтому

$$|\mathcal{S}_n| = n|\mathcal{S}_{n-1}| = n(n-1)|\mathcal{S}_{n-2}| = \cdots = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1.$$

Это число — произведение всех натуральных чисел от 1 до n — принято называть *факториалом числа* n и обозначать $n!$.

Множество N_n содержит n одноэлементных подмножеств. Нетрудно видеть, что число двухэлементных подмножеств в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Действительно, первый элемент из двух мы можем выбрать n способами, а второй $n-1$ способами из еще невыбранных элементов. Значит, упорядоченную пару элементов можно выбрать $n(n-1)$ способами. Поскольку две пары a, b и b, a образуют одно и то же множество, для подсчета двухэлементных подмножеств необходимо количество упорядоченных пар поделить на 2.

Как подсчитать число k-элементных подмножеств в N_n для произвольного натурального числа k? Во-первых, очевидно, что при $k > n$ это число равно 0. Если же $k \le n$, то будем строить все k-элементные подмножества в N_n следующим образом. Возьмем произвольную перестановку множества N_n, и возьмем первые k элементов в этой перестановке (т.е. те элементы, в которые перешли $1, 2, \ldots, k$). Ясно, что таким образом мы получим все k-элементные подмножества, причем каждое из них будет встречаться одно и то же количество раз. Это количество раз равно $k!(n-k)!$, поскольку перестановки первых k элементов и оставшихся $n-k$ элементов не меняют выбранное подмножество. Поэтому для подсчета числа k-элементных подмножеств в N_n нужно разделить общее число перестановок на $k!(n-k)!$. Полученное число называется *числом сочетаний* из n элементов по k и обозначается через

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.1}$$

(В литературе также часто встречается обозначение C_n^k.) Поскольку дополнение k-элементного множества в множестве из n элементов состоит из $n-k$ элементов, количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве равно количеству $(n-k)$-элементных подмножеств в нем, что прекрасно подтверждается выведенной нами формулой для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

В случае $k = n$ формула для числа сочетаний имеет вид

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{1}{0!}.$$

Поскольку число n-элементных подмножеств в n-элементном множестве, очевидно, равно 1, мы обязаны положить $0! = 1$. Тогда формула для числа сочетаний приобретает смысл и при $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

— в произвольном множестве имеется ровно одно 0-элементное подмножество (пустое множество).

Числа сочетаний это в точности коэффициенты, встречающиеся в разложении степеней бинома:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n. \tag{1.2}$$

Действительно,

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y),$$

и коэффициент при $x^{n-k}y^k$ в произведении равен количеству k-элементных подмножеств в множестве из n скобок $(x+y)$. Это в точности те скобки, из которых мы выбираем слагаемое y.

Уже это простое наблюдение позволяет вывести нетривиальные комбинаторные тождества. Например,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

как результат подстановки $x = 1, y = 1$ в разложение бинома (1.2). (Вот другой вывод того же тождества: 2^n это общее количество подмножеств в множестве из n элементов, а в левой части равенства суммируются количества подмножеств с данным числом элементов.) Точно так же получаем

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^k\binom{n}{k} + \dots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0 \text{ при } n > 0.$$

При нечетном n это равенство очевидным образом следует из симметрии $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, а вот при четном n его проще всего получить подстановкой $x = 1, y = -1$ в разложение бинома.

Разложение бинома нам еще не раз встретится в этой книге, в том числе и в настоящей главе.

1.2 Бином Ньютона

Числитель и знаменатель дроби в формуле (1.1) для числа сочетаний можно сократить на $(n-k)!$, переписав ее в виде

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{1.3}$$

Такое сокращение позволяет расширить круг значений, к которым она применима — в качестве аргумента n можно брать произвольное число, не обязательно натуральное. Например,

$$\binom{1/2}{k} = \frac{1/2(-1/2)(-3/2)(-5/2)\dots((3-2k)/2)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot (2k-3)}{2^k k!}.$$

При таком подходе число сочетаний перестает быть целым и теряет прямой комбинаторный смысл (нельзя сказать, что это число k-элементных подмножеств в «полуэлементном множестве»). Вообще, число n может быть иррациональным и даже комплексным. Однако по-прежнему естественно полагать

$$\binom{n}{0} = 1$$

для произвольного n.

Если n натуральное или 0, то при $k > n$ в знаменателе формулы (1.3) встречается нулевой множитель, и поэтому все выражение равно 0. Напротив, если n не является целым неотрицательным числом, то число сочетаний $\binom{n}{k}$ не является нулевым ни при каком k.

Такие обобщенные числа сочетаний можно применить для получения разложения бинома в произвольной степени, не только в целой. А именно,

$$(1+s)^a = 1 + \binom{a}{1}s + \binom{a}{2}s^2 + \binom{a}{3}s^3 + \binom{a}{4}s^4 + \dots \tag{1.4}$$

Здесь в обозначениях n заменено на a, чтобы подчеркнуть, что мы больше не считаем показатель натуральным, а первая переменная заменена на 1, чтобы не было необходимости решать, что такое x в ненатуральной степени ($1^a = 1$ для любого показателя a). В случае, если число a является натуральным, разложение (1.4) совпадает с обычной степенью бинома. Для ненатурального показателя степени оно было введено Ньютоном и представляет собой бесконечный степенной ряд. Этот ряд можно считать определением левой части (а можно — и в курсе математического анализа это делается — доказывать, что ряд сходится при $|s| < 1$, причем слева от знака равенства действительно написана функция, к которой он сходится).

1.3 Экспонента

Экспонента является одной из важнейших функций во всей математике. Ее определяющее свойство состоит в том, что она преобразует сумму в произведение. Давайте найдем такую функцию $f = f(s)$, что тождественно выполняется равенство

$$f(s+t) = f(s)f(t). \tag{1.5}$$

Подставляя $s = 0, t = 0$, мы сразу заключаем, что $f(0) = f(0) \cdot f(0)$, откуда $f(0)$ равняется либо 0, либо 1. Мы рассмотрим только случай $f(0) = 1$, оставив случай $f(0) = 0$ в качестве задачи в конце главы.

Пусть f имеет разложение

$$f(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots.$$

Тогда условие (1.5) на функцию f записывается в виде равенства

$$\begin{aligned} 1 + a_1(s+t) + a_2(s+t)^2 + a_3(s+t)^3 + \dots \quad = \quad & (1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots) \\ & \cdot(1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots), \end{aligned}$$

которое должно выполняться тождественно по s и t. Найдем, к каким ограничениям на коэффициенты a_i приводит это равенство. Для этого будем последовательно сравнивать коэффициенты при мономах данной степени в левой и правой его частях. При мономах первой степени получаем равенство

$$a_1(s+t) = a_1 s + a_1 t,$$

которое выполняется тождественно при любом значении коэффициента a_1. Зафиксируем какое-нибудь значение этого коэффициента и обозначим его через a, $a_1 = a$.

Для мономов степени 2 должно выполняться равенство

$$a_2(s+t)^2 = a_2 s^2 + a^2 st + a_2 t^2,$$

или

$$2a_2 st = a^2 st,$$

которое выполняется тождественно только если $a_2 = a^2/2$. Рассуждая также далее получаем

$$a_3(s+t)^3 = a_3 s^3 + \frac{a^3}{2} s^2 t + \frac{a^3}{2} s t^2 + a_3 t^3,$$

откуда

$$a_3 = a^3/6.$$

Нетрудно видеть, что на каждом шаге, если соответствующее уравнение разрешимо, то решение единственно и дает значение a_n равным a^n с некоторым коэффициентом.

Можно было бы показать, что решение действительно всегда существует и коэффициент при a^n равен $1/n!$. Мы поступим наоборот и определим экспоненту разложением

$$e^{as} = \exp(as) = 1 + \frac{a}{1!}s + \frac{a^2}{2!}s^2 + \frac{a^3}{3!}s^3 + \frac{a^4}{4!}s^4 + \dots.$$

Это бесконечный степенной ряд, коэффициенты которого — обратные факториалы.

Теперь нетрудно проверить, что

$$e^{a(s+t)} = e^{as}e^{at}.$$

Действительно, нам надо доказать, что

$$\begin{aligned} 1 + \frac{a(s+t)}{1!} + \frac{a^2(s+t)^2}{2!} + \frac{a^3(s+t)^3}{3!} + \dots \quad = \quad & (1 + \frac{as}{1!} + \frac{a^2s^2}{2!} + \frac{a^3s^3}{3!} + \dots) \\ & (1 + \frac{at}{1!} + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots). \end{aligned}$$

В левой части равенства моном s^kt^l появляется только в разложении бинома $(s+t)^n$, где $n = k+l$, причем коэффициент при этом мономе равен $\frac{a^n}{n!}\binom{n}{k} = \frac{a^n}{k!l!}$. Этот коэффициент в точности совпадает с коэффициентом при s^kt^l в правой части равенства. Поэтому всякий моном входит в левую и правую части равенства с одним и тем же коэффициентом.

Зная, что решение уравнения (1.5) с $f(0) = 1$ — если оно существует — однозначно определяется коэффициентом при s, мы заключаем, что экспонента и является этим единственным решением. При $a = 0$ экспонента тождественно равна 1. Если же $a \neq 0$, то экспонента e^{as} получается из e^s обратимой заменой s на as. Поэтому чаще всего мы будем пользоваться экспонентой e^s, отвечающей значению $a = 1$.

Тригонометрические функции просто выражаются через экспоненту:

$$\begin{aligned} \sin s &= \frac{e^{\sqrt{-1}s} - e^{\sqrt{-1}s}}{2\sqrt{-1}} = s - \frac{1}{3!}s^3 + \frac{1}{5!}s^5 - \dots; \\ \cos s &= \frac{e^{\sqrt{-1}s} + e^{\sqrt{-1}s}}{2} = 1 - \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \dots . \end{aligned}$$

Здесь $\sqrt{-1}$ — комплексное число, квадрат которого равен -1; его часто обозначают через i, однако такое обозначение нередко приводит к путанице.

Смысл переменной s, от которой берется экспонента, может быть самым разным. Например, s может обозначать дифференцирование:

$$e^{\frac{d}{dt}} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{d}{dt} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dt}\right)^4 + \dots,$$

и мы вправе спросить себя, что является экспонентой от дифференцирования. Здесь k-я степень дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^k$ это операция взятия k-ой производной. Для того, чтобы понять, чему равна экспонента от дифференцирования, посмотрим, как она действует на многочленах. Для этого достаточно посмотреть, как она действует на всех степенях t^k переменной t. К счастью, результат $(k+1)$-го и всех старших дифференцирований монома t^k равен 0, поэтому при применении $e^{\frac{d}{dt}}$ к t^k в правой части равенства остается лишь конечное число слагаемых:

$$\begin{aligned} e^{\frac{d}{dt}}t^k &= \left(1+\frac{1}{1!}\frac{d}{dt}+\frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\dots+\frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dt}\right)^k\right)t^k \\ &= t^k+\frac{k}{1!}t^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}t^{k-2}+\dots+\frac{k!}{k!} \\ &= \binom{k}{k}t^k+\binom{k}{k-1}t^{k-1}+\binom{k}{k-2}t^{k-2}+\dots+\binom{k}{0}. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства есть не что иное как разложение бинома $(1+t)^k$, и мы заключаем, что

$$e^{\frac{d}{dt}}t^k = (t+1)^k.$$

Поскольку экспонента дифференцирования действует на многочленах линейно, мы заключаем, что для любого многочлена $p = p(t)$

$$e^{\frac{d}{dt}}p(t) = p(t+1).$$

Другими словами, *экспонента дифференцирования является сдвигом на* 1. Это глубокое утверждение лежит в основе теории групп Ли. Мы будем им неоднократно пользоваться.

1.4 Производящие функции и действия над ними

Перейдем к строгим определениям.

Определение 1.4.1. Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots$ — произвольная (бесконечная) последовательность чисел. *Производящей функцией* (*производящим рядом*) для этой последовательности будем называть выражение вида

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots,$$

или, в сокращенной записи,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция является *производящим многочленом.*

Числа, входящие в последовательность, могут иметь различную природу. Мы будем рассматривать последовательности натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Производящую функцию, как и обычную функцию, мы будем часто обозначать одной буквой, указывая в скобках ее аргумент:

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots.$$

Две производящие функции равны в том и только в том случае, если у них совпадают коэффициенты при каждой степени переменной. Поэтому мы часто будем проверять равенство производящих функций или решать уравнения на них, последовательно сравнивая коэффициенты при s^0, s^1, s^2 и т.д.

Замечание 1.4.2. Употребляя слово «функция», мы вовсе не имеем в виду, что написанное выражение действительно является функцией. Так, не следует думать, будто мы можем сказать, чему равно «значение $A(1)$ производящей функции A в точке 1». Для этого нам пришлось бы сосчитать сумму бесконечного ряда $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$. Изучение производящих функций не требует суммирования бесконечных числовых рядов. Переменная s является *формальной*, и сумма ряда $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ смысла не имеет. Однако верны утверждения $A(0) = a_0$, $A'(0) = a_1$, $A''(0) = 2a_2$ и т.д..

Производящая функция представляет последовательность чисел в виде ряда по степеням формальной переменной. Поэтому наряду с термином «производящая функция» мы будем также пользоваться термином «формальный степенной ряд».

Определение 1.4.3. *Суммой* двух производящих функций

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

называется производящая функция

$$A(s) + B(s) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)s + (a_2 + b_2)s^2 + \dots.$$

Произведением производящих функций A и B называется производящая функция

$$A(s)B(s) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)s + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)s^2 + \dots.$$

Операции сложения и умножения производящих функций, очевидно, коммутативны ($A + B = B + A, AB = BA$) и ассоциативны ($(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$); кроме того, выполняется дистрибутивный закон ($A(B + C) = AB + AC$).

Определение 1.4.4. Пусть

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

и

$$B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \dots$$

— две производящие функции, причем $B(0) = b_0 = 0$.

Подстановкой производящей функции B в производящую функцию A называется производящая функция

$$\begin{aligned} A(B(t)) &= a_0 + a_1 B(t) + a_2 B^2(t) + a_3 B^3(t) + \dots \\ &= a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2)t^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)t^3 + \dots. \end{aligned}$$

Если, например, $B(t) = -t$, то

$$A(B(t)) = A(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3 + \ldots.$$

Производящая функция $A = A(s)$ называется *четной*, если $A(-s) = A(s)$ *нечетной*, если $A(-s) = -A(s)$. Функция является четной в том и только в том случае, если ее степенной ряд содержит лишь члены четной степени. Функция является нечетной в том и только в том случае, если ее степенной ряд содержит лишь члены нечетной степени.

Обратите внимание на то, что операция подстановки функции, отличной от нуля в нуле, не определена. При попытке подставить такую функцию мы столкнулись бы с необходимостью суммировать бесконечные числовые ряды.

Конечно же, если обе производящие функции A и B являются многочленами, то определения суммы, произведения и подстановки для них совпадают с обычными определениями этих операций для многочленов. Определения этих операций на степенных рядах являются результатом их продолжения с многочленов.

Чтобы познакомиться с производящими функциями поближе, давайте докажем важную теорему.

Теорема 1.4.5 (об обратной функции). *Пусть функция*

$$B(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots$$

такова, что $B(0) = b_0 = 0$, *а* $b_1 \neq 0$. *Тогда существуют такие функции*

$$A(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots, \quad A(0) = 0$$

и

$$C(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \ldots, \quad C(0) = 0,$$

что

$$A(B(t)) = t \quad \text{и} \quad B(C(u)) = u.$$

Функции A *и* C *единственны.*

Функция A называется *левой обратной*, а функция C — *правой обратной* к функции B.

Доказательство. Докажем существование и единственность левой обратной функции. Доказательство для правой обратной аналогично. Будем определять коэффициенты функции A последовательно. Коэффициент a_1 определяется из условия $a_1 b_1 = 1$, откуда

$$a_1 = \frac{1}{b_1}.$$

Предположим теперь, что коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже определены. Коэффициент a_{n+1} определяется из условия

$$a_{n+1} b_1^{n+1} + \cdots = b_{n+1},$$

где точками обозначен некоторый многочлен от $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$. Тем самым, условие представляет собой линейное уравнение на a_{n+1}, причем коэффициент b_1^{n+1} при a_{n+1} отличен от нуля. Такое уравнение имеет единственное решение, и теорема доказана. $\square$

Итак, мы научились складывать и умножать степенные ряды и подставлять их друг в друга. Хотелось бы также научиться делить их друг на друга. Последняя операция не всегда корректно определена. В этом отношении степенные ряды похожи на целые числа: не всегда целое число при делении на другое целое число дает в ответе целое число. Однако, во всяком случае, возможно деление на степенной ряд, значение которого в нуле отлично от нуля.

Утверждение 1.4.6. *Пусть*

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

— формальный степенной ряд, причем $A(0) = a_0 \neq 0$. Тогда существует единственный формальный степенной ряд

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \dots,$$

такой что $A(s)B(s) = 1$.

Доказательство. Снова проведем доказательство по индукции. $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Пусть теперь все коэффициенты ряда B вплоть до степени $n-1$ однозначно определены. Коэффициент при s^n определяется из условия

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0.$$

Это линейное уравнение на b_n, причем коэффициент a_0 при b_n отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет единственное решение. $\square$

Отметим, что, несмотря на теоремы существования, нахождение обратной функции — относительно подстановки или относительно деления — в явном виде может оказаться сложной задачей, даже если сама функция относительно проста. Выше мы нашли обратную функцию относительно подстановки для экспоненты. А вот, скажем, вычисление функции $1/\cos s$ займет у нас целый параграф, и приведет к очень интересному результату.

1.5 Дифференцирование и интегрирование производящих функций

Для производящих функций обычное определение производной можно записать в следующем виде.

Определение 1.5.1. Пусть $A = A(s)$ — производящая функция. *Производной* этой функции называется функция

$$A'(s) = \left.\frac{A(s+t) - A(s)}{t}\right|_{t=0}.$$

Поскольку при $t = 0$ числитель дроби в определении производной обращается в нуль, этот числитель делится на t, и определение корректно. Дифференцирование, очевидно, линейная операция, поэтому для того, чтобы понять, как оно действует на производящих функциях, достаточно посмотреть на его действие на степенях переменной. Имеем

$$\left(s^k\right)' = \left.\frac{(s+t)^k - s^k}{t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\binom{k}{1}s^{k-1}t + \dots}{t}\right|_{t=0} = ks^{k-1}.$$

Здесь многоточие в числителе обозначает многочлен, делящийся на t^2; после деления на t и приравнивания t нулю этот многочлен обращается в 0. Тем самым, действие дифференцирования на произвольной производящей функции $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$ дает

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \dots.$$

Уже это определение позволяет нам решать простейшие дифференциальные уравнения. Найдем, например, функцию, производная которой совпадает с ней самой,

$$F'(s) = F(s). \tag{1.6}$$

Пусть F имеет вид $F(s) = f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + \dots$. Тогда $F'(s) = f_1 + 2f_2 s + 3f_3 s^2 + \dots$. Сравнивая коэффициенты при нулевой степени переменной в левой и правой частях равенства (1.6), мы заключаем, что $f_1 = f_0$. Сравнение коэффициентов при первой степени s дает $2f_2 = f_1$, откуда $f_2 = \frac{1}{2}f_1 = \frac{1}{2}f_0$. Продолжая таким же образом, мы заключаем, что $f_k = \frac{1}{k!}f_0$ для всех $k = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим f_0 через c. Наше рассуждение приводит к следующему выводу:

Всякое решение уравнения (1.6) *имеет вид*

$$F(s) = c(1 + \frac{1}{1!}s + \frac{1}{2!}s^2 + \frac{1}{3!}s^3 + \dots) = ce^s$$

для некоторой постоянной c. Тем самым, уравнение (1.6) имеет единственное решение с заданным значением $F(0) = c$. Ниже в этой книге мы не раз будем обсуждать решение дифференциальных уравнений на производящие функции.

Интегралом называется функция

$$\int A(s) = a_0 s + a_1 \frac{s^2}{2} + a_2 \frac{s^3}{3} + \dots + a_n \frac{s^{n+1}}{(n+1)} + \dots .$$

Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left(\int A(s)\right)' = A(s).$$

Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции,

$$\int A'(s) = A(s) - A(0).$$

Замечание 1.5.2. Нетрудно видеть, что для функций, представимых в виде степенных рядов, формула для производной соответствует обычной. Формула для интеграла соответствует значению интеграла с переменным верхним пределом
$$\int A(s) = \int_0^s A(\xi)d\xi.$$

Последнее замечание позволяет подсчитывать производящие функции для большого числа разнообразных последовательностей. Вычислим, например, обратную функцию к экспоненте. Эта функция называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln(\cdot)$, $\ln(e^s) = s$. Разложение экспоненты начинается с 1, поэтому аргумент логарифма нужно сдвинуть в 1:

$$\ln(1+t) = l_1 t + l_2 t^2 + l_3 t^3 + \dots$$

(свободный член в разложении равен 0, поскольку $\ln(1) = 0$). Для вычисления коэффициентов разложения логарифма воспользуемся тем, что производная функции и обратной к ней в произведении дают 1. Поскольку $\frac{d}{ds}e^s = e^s$, получаем

$$\frac{d}{dt}\ln(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \dots,$$

откуда, интегрируя,

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots.$$

Мы будем чаще пользоваться следующим вариантом последней формулы:

$$-\ln(1-t) = \ln(1-t)^{-1} = t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \dots. \tag{1.7}$$

Отметим, что бином Ньютона удобно записывать с помощью экспоненты:
$$(1+t)^a = e^{a\ln(1+t)}.$$

В качестве еще одного примера, вычислим производящую функцию

$$f(s) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}s + \frac{1}{3\cdot 4}s^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}s^n + \dots\ .$$

Умножая функцию f на s^2 и дифференцируя, получаем

$$(s^2 f(s))' = s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{3}s^3 + \dots = \ln(1-s)^{-1},$$

откуда

$$\begin{aligned} f(s) &= s^{-2}\int \ln(1-s)^{-1} \\ &= s^{-2}\left((s-1)\ln(1-s)^{-1} + s\right). \end{aligned}$$

1.6 Алгебра и топология формальных степенных рядов

Ниже приводятся некоторые сведения из теории формальных степенных рядов. Они не используются в книге, но могут помочь обозначить место этой теории в ряду других математических дисциплин.

С алгебраической точки зрения множество формальных степенных рядов (с коэффициентами в поле комплексных, вещественных или рациональных чисел) образует (бесконечномерное) *векторное пространство* над этим полем. Операция умножения рядов превращает это векторное пространство в *алгебру*, которая обозначается $\mathbb{C}[[s]]$ (соотв., $\mathbb{R}[[s]]$ или $\mathbb{Q}[[s]]$). Важную роль в этой алгебре играют *идеалы*, т.е. такие подмножества $I \subset \mathbb{C}[[s]]$, что $fI \subset I$ для любого элемента $f \in \mathbb{C}[[s]]$. В алгебре формальных степенных рядов все идеалы — *главные*, т.е. все они имеют вид $f\mathbb{C}[[s]]$ для некоторой функции $f \in \mathbb{C}[[s]]$. Более того, все идеалы легко описать: они имеют вид $I_k = s^k\mathbb{C}[[s]],\ k = 0, 1, 2, \dots$ (т.е. идеал I_k состоит из всех формальных степенных рядов, делящихся на s^k). Один из идеалов I_k, а именно I_1, максимален: он не содержится ни в каком другом идеале, отличном от всей алгебры. Алгебра с одним максимальным идеалом называется *локальной.* Свойство локальности сближает алгебру формальных степенных рядов с координатными алгебрами в окрестности начала координат (алгебрами *ростков* бесконечно дифференцируемых или аналитических функций). *Факторалгебры* $\mathbb{C}[[s]]/I_k$ называются *алгебрами срезанных многочленов* и тоже очень важны.

В алгебре формальных степенных рядов определена *топология. Открытыми* в этой топологии являются идеалы $I_k,\ k = 0, 1, 2, \dots$ и пустое множество. Введенная топология определяет понятие *сходимости*: последовательность $F_1(s), F_2(s), \dots$ *сходится* к формальному степенному ряду $F(s)$, если для любого числа n существует такой номер N, что все коэффициенты при степенях $s^0, s^1, \dots, s^n$ у рядов $F_k(s)$ при $k > N$ совпадают с коэффициентами при соответствующих степенях у ряда $F(s)$. Многочлены — формальные степенные ряды, в которых лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля — образуют векторное подпространство (и подалгебру) в алгебре формальных степенных рядов, которое плотно относительно введенной топологии. Все операции над рядами — сложение, умножение, подстановка, деление, — определяются для многочленов обычным образом, а на степенные ряды продолжаются так, чтобы продолженные операции были непрерывны. Такие продолжения существуют и единственны.

1.7 Задачи

Задача 1.1. Перестановка двух элементов множества N_n, оставляющая остальные элементы на месте, называется *транспозицией*. Найдите число транспозиций в группе $\mathcal{S}_n$.

Задача 1.2. Всякую перестановку можно разложить в произведение независимых циклов. Такое разложение однозначно с точностью до порядка умножаемых циклов. В частности, набор длин этих циклов определяется перестановкой однозначно. Например в $\mathcal{S}_n$, для транспозиции набор длин циклов состоит из одной двойки и $n-2$ единиц, а набор длин циклов тождественной перестановки состоит из n единиц. Сумма длин циклов равна числу элементов перестановки; другими словами, набор этих длин является *разбиением* длины перестановки. Перестановка называется *длинным циклом*, если ее разложение в произведение независимых циклов состоит из единственного цикла. Длина такого цикла, разумеется, совпадает с длиной перестановки. Найдите число длинных циклов в группе $\mathcal{S}_n$.

Задача 1.3. Найдите число элементов в $\mathcal{S}_n$, отвечающих разбиениям а) $1^{n-4}2^2$ (произведение транспозиций двух пар элементов, среди которых нет общих); б) $1^{n-3}3^1$ (циклов длины 3).

Задача 1.4. Докажите, что если функция $f = f(s)$, представимая в виде степенного ряда, преобразует сумму в произведение, т.е. тождественно выполняется равенство $f(s+t) = f(s)f(t)$, и $f(0) = 0$, то она тождественно равна 0.

Задача 1.5. Докажите, что логарифм преобразует произведение в сумму:

$$\ln((1+s)(1+t)) = \ln(1+s) + \ln(1+t).$$

Задача 1.6. Докажите следующие равенства: а) $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$;
б) $(1+s)^\alpha(1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$; в) $\ln((1-s)^\alpha) = \alpha\ln(1-s)$.

Задача 1.7. Пусть функция $B = B(s) = b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + \dots$ такова, что $b_1 \neq 0$. Докажите, что правая обратная функция $A(s)$ и левая обратная функция $C(s)$ совпадают. Эта общая *обратная функция* обозначается через $B^{-1}(t)$.

Задача 1.8. Пусть $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ — производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$. Найдите производящие функции для последовательностей
а) $a_0+a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, \dots$; б) $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots, a_0+a_1+a_2+a_3, \dots$;
в) $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$; г) $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, a_8, \dots$.

Задача 1.9. Докажите, что степенные ряды вида

$$a_1s + a_2s^2 + \dots, \qquad a_1 \neq 0,$$

образуют группу относительно операции подстановки.

Задача 1.10. Вычислите три первых ненулевых коэффициента функций, обратных относительно операции подстановки, к следующим функциям: а) $\sin\ s$; б) $e^s - 1$; в) $s + s^2$.

Задача 1.11. Найдите разложение арксинуса:

$$\sin^{-1}\ s = \arcsin\ s = z + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^7 + \dots$$

Задача 1.12. Докажите, что не существует такого формального степенного ряда $A(s)$, что $sA(s) = 1$.

Задача 1.13. Докажите, что если каждый из степенных рядов $A(s)$ и $B(s)$ отличен от нуля, то и их произведение $A(s)B(s)$ отлично от нуля.

Задача 1.14. Пусть ряды $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots,\ a_0 \neq 0$, и $B(s) = b_1 s + b_2 s^2 + \dots,\ b_1 \neq 0$, имеют целые коэффициенты. При каких условиях на коэффициенты этих рядов ряды $\frac{1}{A(s)}$, $B^{-1}(s)$ имеют целые коэффициенты?

Задача 1.15. Найдите все решения дифференциальных уравнений а) $F'(s) = aF(s)$, б) $F'(s) = F^2(s)$.

Задача 1.16. Найдите производящие функции для последовательностей а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$; б) $1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \dots$.

Задача 1.17. Докажите, что для ряда $B = B(t)$ с нулевым свободным членом, $B(0) = 0$, и произвольного ряда $A = A(s)$

$$\left(\int A\right)(B(t)) = \int (A(B(t))\cdot B'(t))$$

(формула замены переменных в интеграле).

Задача 1.18. Докажите формулу Ньютона–Лейбница

$$(A(s)B(s))' = A'(s)B(s) + A(s)B'(s).$$

Задача 1.19. Докажите формулу интегрирования по частям:

$$\int (A(s)B'(s) + A'(s)B(s)) = A(s)B(s) - A(0)B(0).$$

Задача 1.20. Докажите, что при заданном натуральном значении k любое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \dots + \binom{b_k}{k},$$

где $0 \le b_1 \le b_2 \le \dots \le b_k$. Например, при $k = 1$ это верно, так как всякое число n допускает единственное представление в виде $n = \binom{n}{1}$.

Нижеследующие задачи взяты из знаменитого сборника Полиа и Сегё «Теоремы и задачи из анализа».

Задача 1.21 *(I.16).* Определите коэффициент a_n в разложении

$$(1 + qs)(1 + qs^2)(1 + qs^4)(1 + qs^8)\cdots = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots.$$

Задача 1.22 *(I.33).* Докажите тождество

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+\binom{2n}{2}^2-\dots-\binom{2n}{2n-1}^2+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}^2.$$

Задача 1.23 *(I.37).* Докажите тождество

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}-\dots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0 \text{ при } n>1.$$

Задача 1.24 *(I.38).* Докажите тождество

$$\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}.$$

Задача 1.25 *(I.39).* Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k+1}{2k+1}=n+1.$$

Задача 1.26 *(I.41).* Положим

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)+\dots\\ \psi(x) &= a_0+\frac{a_1}{2}x+\frac{a_2}{2^2}x(x-1)+\frac{a_3}{2^3}x(x-1)(x-2)+\dots\end{aligned}$$

Докажите, что тогда

$$\binom{n}{0}\varphi(0)+\binom{n}{1}\varphi(1)+\binom{n}{2}\varphi(2)+\dots+\binom{n}{n}\varphi(n)=2^n\psi(n)$$

и

$$\binom{n}{0}\varphi(0)-\binom{n}{1}\varphi(1)+\binom{n}{2}\varphi(2)-\dots+(-1)^n\binom{n}{n}\varphi(n)=(-1)^na_nn!.$$

(Обратите внимание на то, что функции φ и ψ, хотя и представляют собой бесконечные суммы, не являются формальными степенными рядами, а значения $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ при натуральном аргументе n корректно определены, поскольку при подстановке в ряды натурального значения аргумента все слагаемые кроме конечного числа обращаются 0.)

Задача 1.27 *(I.42).* Докажите тождество

$$\binom{n}{0}(0-n)^2+\binom{n}{1}(2-n)^2+\binom{n}{2}(4-n)^2+\dots+\binom{n}{\nu}(2\nu-n)^2+\dots=2^nn.$$

Задача 1.28 *(I.44).* Докажите, что для любого многочлена f выполняется равенство

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)x^k=f(k)x^k.$$