

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГУ-ВШЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2010 Г.

1. Сколькими способами можно покрасить грани куба в три цвета так, чтобы покрашены были только три грани, а остальные остались непокрашенными? Разные грани можно красить в один и тот же цвет. Раскраски, отличающиеся вращением куба, считаются совпадающими.

2. Рассмотрим подмножество  $A$  векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ . Скажем, что точка  $a \in A$  принадлежит *ядру* множества  $A$ , если для всякого вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  найдется число  $\varepsilon > 0$  со следующим свойством:  $a + \lambda x \in A$  для любого числа  $\lambda \in (0, \varepsilon)$ . а) Предположим, что множество  $A$  совпадает со своим ядром и выпукло. Докажите, что тогда оно открыто. б) Верно ли то же утверждение для произвольного, не обязательно выпуклого множества?

3. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \left[ \frac{2^n}{3} \right].$$

Здесь  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .

4. Пусть  $G$  — конечная группа нечетного порядка. Докажите, что если элемент  $x \in G$  сопряжен элементу  $x^{-1}$ , то  $x$  совпадает с единичным элементом группы  $G$ .

5. Пусть  $V$  — комплексное векторное пространство, состоящее из всех матриц размера  $2 \times 2$ . Найдите собственные числа линейного оператора  $L_A : V \rightarrow V$ , действующего по формуле  $L_A(X) = AX - XA$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$