

Государственный университет «Высшая школа экономики»
Факультет математики

4 мая 2008 г.

1. У Серёжи имеется шесть отрезков, причем из любых трёх из них можно сложить треугольник. Обязательно ли из этих шести отрезков можно сложить тетраэдр?
2. Решите следующее уравнение, которое неправильно решает одна из популярных математических программ:

$$\arcsin(2t\sqrt{1-t^2}) = 2 \arcsin t.$$

3. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C , а точка O — центр описанной окружности. На продолжении отрезка OA за точку A взяты две точки: точка P — пересечение прямых OA и BC ; точка N такая, что углы ABN и OBC равны. Известно, что $PN = PB$. Найдите угол C .
4. График функции $f(x)$ является ломаной, состоящей из 50 звеньев. Известно, что область значений функции $f(x)$ содержится в её области определения. Может ли график функции $f(f(x))$ быть а) ломаной, состоящей более, чем из 2008 звеньев? б) отрезком?
5. Угол обзора Таниного фотоаппарата равен 90° , то есть Таня фотографирует произвольный прямой угол (граница угла тоже попадает на снимок). В городе несколько небоскрёбов. Таня заметила, что с каждого из них она может сфотографировать не более 5 других небоскрёбов. Какое наибольшее число небоскрёбов могло быть в городе, если никакие три из них не лежат на одной прямой? (Небоскрёбы считаются точками на плоскости).
6. Воинственная страна Дендралия имеет 10 военных баз за рубежом. Каждую такую базу надо соединить секретной телефонной линией с одной из N телефонных станций внутри страны, а эти телефонные станции — несколькими телефонными линиями между собой. По соображениям секретности требуется, чтобы каждую пару точек этой телефонной сети соединяла единственная цепочка линий (возможно, проходящая через несколько телефонных станций). Кроме того, в каждой телефонной станции должно сходиться не менее трёх линий (иначе её строительство не нужно). Институт Чётных Исследований должен подготовить все возможные проекты таких сетей с чётными значениями N , а Центр Нечётных Проблем — с нечётными N .
а) Каких проектов получится больше? б) На сколько?