Площади на клетчатой бумаге

Этот листок вспомогательный — единственной его целью является напомнить две известных стандартных формулы для площадей, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем. Сами формулы обсуждаются в зад. ДП 0◇1 и зад. ДП 0◇2, а остальные задачи служат своего рода тестом на их понимание. Если вы можете быстро, без долгих раздумий ответить на вопросы этих задач, то можете спокойно пропустить этот листок и переходить сразу к следующему.

ДП 0◇1° (формула Пика). Рассмотрим не обязательно выпуклый, но несамопересекающийся многоугольник $\mathfrak{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги. Сравните его площадь $S = S(\mathfrak{M})$ (в клеточках) с числом

$$\mathit{\Pi} = \mathit{\Pi}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def}}{=} (\text{ число узлов внутри } \mathfrak{M}) + \frac{1}{2}(\text{ число узлов на границе } \mathfrak{M}) - 1\,,$$

выяснив для этого, справедливы ли равенства:

а) $\mathit{\Pi}(\mathfrak{M}) = \mathit{\Pi}(\mathfrak{M}_1) + \mathit{\Pi}(\mathfrak{M}_2)$ для многоугольника $\mathfrak{M}$, разрезанного прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (тоже с вершинами в узлах клеток);

б) $\mathit{\Pi} = S$ для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям клеток;

в) $\mathit{\Pi} = S$ для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям клеток;

г) $\mathit{\Pi} = S$ для любого треугольника; **д)** $\mathit{\Pi} = S$ для любого выпуклого многоугольника;

е) $\mathit{\Pi} = S$ в общем случае.

ДП 0◇2° (ориентированная площадь параллелограмма). Обозначим через $\delta(a, b)$ площадь параллелограмма, натянутого на векторы a, b, взятую со знаком «+», если кратчайший поворот, совмещающий направление a с направлением b, происходит против часовой стрелки, и со знаком «−» , если против (см. рис. 0◇1). Отметим, что равенство $\delta(a, b) = 0$ равносильно пропорциональности векторов a и b. Убедитесь, что $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}\ \ \delta(a + \lambda b, b) = \delta(a, b)$ и $\delta(\lambda a, b) = \lambda\delta(a, b) = \delta(a, \lambda b)$, а также что $\delta(a, b) = -\delta(b, a)$ и[1] что $\delta(a + c, b) = \delta(a, b) + \delta(c, b)$). Пользуясь этими свойствами, покажите, что $\delta(a, b) = a_1b_2 - a_2b_1$, где (a_1, a_2) и (b_1, b_2) суть координаты векторов a и b в любой прямоугольной системе координат.

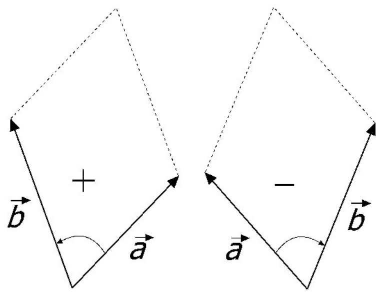

Рис. 0◇1.

ДП 0◇3. Может ли треугольник с площадью 1 и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

ДП 0◇4. Верно ли, что любой отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри, можно достроить до треугольника площади 1 с вершинами в узлах?

ДП 0◇5. Может ли параллелограмм с площадью 1 и вершинами в узлах накрывать какие-либо узлы кроме вершин? Может ли расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами такого параллелограмма быть сколь угодно большим?

ДП 0◇6. Прямая ℓ соединяет узлы с координатами $(0, 0)$ и (p, q), причём между этими узлами на прямой ℓ нет других узлов. Есть ли среди не лежащих на ℓ узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой ℓ.

[1] подсказка: отдельно рассмотрите два возможных случая: $b = \lambda a$ и $c = \lambda a + \mu b$

Задача о трёх кузнечиках

Числа как направления. Всякое рациональное число можно (многими способами) записать в виде p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Будем изображать такую запись точкой с координатами (p, q) на верхней координатной полуплоскости. Это задаёт биекцию между множеством ненулевых рациональных чисел и множеством выходящих из начала координат лучей, имеющих рациональный тангенс угла наклона с осью OX.

Иррациональное вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ мы также будем изображать лучём $y = \alpha x$ с иррациональным тангенсом угла наклона α. С каждым таким лучом связаны две ломаные (см. рис. 1◇1), ограничивающие выпуклые оболочки всех целых точек, которые лежат, соответственно, над и под лучом $y = \alpha x$. Условимся обозначать вершины этих ломаных занумерованными подряд слева направо буквами T_i так, чтобы вершины нижней ломаной нумеровались чётными, а вершины верхней — нечётными целыми числами и чтобы *первое невертикальное* звено нижней ломаной называлось $[T_0T_2]$. Условимся также обозначать через (p_n, q_n) координаты вершины T_n, а через a_n — число кусков, на которые ребро $[T_{n-2}T_n]$ разбивается лежащими на нём целыми точками.

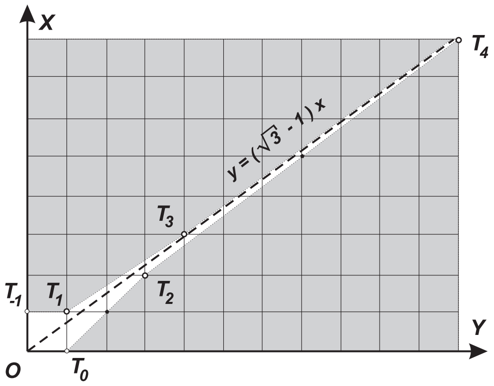

Рис. 1◇1. Иррациональный луч.

ДП 1◇1 (задача о трёх кузнечиках). Три кузнечика сидят в точках $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$ и могут прыгать в первом квадранте по следующему правилу: любому из двух крайних кузнечиков[1] (как левому так и правому) разрешается центрально симметрично перепрыгивать через среднего кузнечика. Верно ли, что:

а) кузнечики всегда образуют с началом координат параллелограмм площади 1, не накрывающий никаких других целых точек, кроме своих вершин;

б) кузнечики могут находиться только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с целыми взаимно простыми координатами имеется единственный алгоритм движения всех трёх кузнечиков, приводящий одного из них в эту точку;

г) для иррационального $\alpha > 0$ кузнечики последовательно посетят всех целые точки, лежащие на изображённых на рис. 1◇1 ломаных, если будут скакать из своего начального положения так, чтобы каждый раз прыгал крайний кузнечик, находящийся по одну сторону от луча $y = \alpha x$ со средним;

д) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны;

е) $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$

ж) $\begin{cases} p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n \end{cases}$ **з)** $\dfrac{1}{q_n\,(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$; **и)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

ДП 1◇2. Как изменятся ответы на последние шесть вопросов задачи о трёх кузнечиках, если в них взять $\alpha \in \mathbb{Q}$?

ДП 1◇3. Каждый отличный от начала координат узел клетчатой бумаги накрыли кругом радиуса $10^{-2008^{2009}}$ с центром в этом узле. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного такого круга?

ДП 1◇4. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая[2] $r_0 = \alpha$, $a_0 = [r_0]$, и $r_{i+1} = 1/(r_i - a_i)$, $a_{i+1} = [r_{i+1}]$ для всех $i \geqslant 0$. Покажите, что получающиеся таким способом числа a_i равны тем, что были определены в начале листка и использовались в задаче о трёх кузнечиках.

[1] выпущенные из начала координат радиус векторы кузнечиков могут быть однозначно охарактеризованы как *левый*, *средний* и *правый*, если смотреть из начала координат внутрь первого координатного октанта

[2] здесь и далее $[x]$ означает целую часть x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x)

Цепные дроби

Цепная дробь — это конечное или бесконечное выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{1}$$

Чуть экономнее такая дробь записывается $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \dots\ ))$. Числа a_i называются *элементами* цепной дроби. Последний элемент конечной цепной дроби всегда предполагается отличным от 1. Цепная дробь называется *канонической*, если $a_0 \in \mathbb{Z}$, а все остальные $a_i \in \mathbb{N}$. Если $a_i \in \mathbb{R}$ и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \dots\ + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\dots)) = \alpha$, цепная дробь (1) называется *сходящейся*, и α называется её *значением*. Если цепная дробь сходится, то вещественные числа

$$r_n = a_n + 1/(a_{n+1} + 1/(a_{n+2} + \ \dots\ ))$$

(такие что $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \dots\ )) = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \dots\ + 1/(a_{n-1} + 1/r_n)\dots)))$ называются её *остатками*. Каждый начальный отрезок $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ \dots\ + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\dots))$ произвольной цепной дроби (1) можно формально свернуть в обыкновенную дробь p_n/q_n, последовательно выполнив справа налево все предписанные действия и *ничего при этом не «сокращая»*. Так,

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0 = \frac{a_0}{1}\,, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1}\,, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_2}{a_1a_2 + 1} \qquad \text{и т. д.}$$

Получающиеся таким образом обыкновенные дроби p_n/q_n называются *подходящими дробями* (или *конвергентами*) цепной дроби (1).

ДП 2◇1. Докажите, что все бесконечные канонические цепные дроби сходятся.

ДП 2◇2. Докажите, что сопоставление цепной дроби её значения устанавливает биекцию между каноническими (конечными и бесконечными) цепными дробями и действительными числами.

ДП 2◇3. Как связаны конвергенты канонической цепной дроби с числами (p_n, q_n) из предыдущего листка?

ДП 2◇4. Какие из соотношений зад. ДП 1◇1 верны для цепных дробей с произвольными $a_i \in \mathbb{R}$? Докажите, что если (1) сходится к α, то $\alpha = (r_np_{n-1} - p_{n-2})\,/\,(r_nq_{n-1} - q_{n-2})\ \forall n$.

ДП 2◇5*. Докажите, что цепная дробь (1) с положительными $a_i \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum a_i$.

ДП 2◇6. Разложите в канонические цепные дроби числа
а) $\sqrt{2}$, **б)** $\sqrt{3}$, **в)** $\sqrt{5}$, **г)** $\sqrt{7}$, **д)** $\sqrt{43}$, **е)** $\sqrt{57}$, **ж)** $\sqrt{179}$.

ДП 2◇7. Сравните начала разложений в цепные дроби чисел π и $179/57$, а также начала записей этих же чисел десятичными дробями. В каком элементе (соотв. знаке) происходят первые расхождения?

ДП 2◇8. Вычислите $1 + 1/(2 + 1/(3 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(3 + \ \cdots)))))$.

ДП 2◇9 (теорема Лагранжа). Докажите, что каноническая цепная дробь периодична тогда и только тогда, когда её значение является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Для этого:

а) по заданной периодической дроби постройте квадратное уравнение, которому удовлетворяет её значение;

б) проверьте, что все остатки r_n канонического разложения корня α заданного квадратного уравнения с целыми коэффициентами также являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами;

в) убедитесь, что у всех квадратных уравнений из предыдущего пункта одинаковый дискриминант, а их коффициенты ограничены.

г) выведите из предыдущего, что остатки начнут повторяться, а элементы зациклятся.

Вещественные квадратичные иррациональности

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n \neq p/q$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$) со знаменателем $m \leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n - m| > |\alpha q - p|$.

ДП 3◇1. Докажите, что любое иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

ДП 3◇2. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей x/y с $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}\,.$$

ДП 3◇3. Нарисуйте кривые $x^2 - y^2 = 1$ и $x^2 - 3\,y^2 = 1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm 1, 0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

ДП 3◇4. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2 - dy^2 \leqslant m$ **б)** уравнение $x^2 - dy^2 = m$ имело бесконечно много целых решений (x, y) с $x, y \neq 0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d\in\mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2-d) \simeq \{\,x + y\sqrt{d}\mid x, y, \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2-d) \simeq \{\,p + q\sqrt{d}\mid p, q, \in \mathbb{Z}\}$$

Число $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ называется *сопряжённым* к числу $\alpha = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, рациональное число $N(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \alpha\overline{\alpha} = x^2 - dy^2$ называется *нормой* числа α.

ДП 3◇5. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ является полем, сопряжение является его инволютивным автоморфизмом, а норма является гомоморфизмом мультипликативных групп. Выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$ и покажите, что для обратимости числа $\vartheta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ необходимо и достаточно, чтобы $N(\vartheta) = \pm 1$.

ДП 3◇6 (группа единиц). Проверьте, что элементы нормы 1 образуют мультипликативную подгруппу в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (она называется *группой единиц* кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$).

Уравнение Пелля. Пусть натуральное $d \geqslant 2$ не делится на квадраты. Целочисленные решения *уравнения Пелля*: $x^2 - dy^2 = 1$ взаимно однозначно соответствуют элементам группы единиц кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Среди них имеются две *тривиальных единицы* ± 1, отвечающие решениям $(\pm 1, 0)$. Кроме того, с каждым решением (x, y) решениями будут также и все $(\pm x, \pm y)$. Решение (x_0, y_0) с *натуральными* x_0, y_0 называется *фундаментальным*, если вещественное число $x_0 + y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$. Соответствующая единица называется *фундаментальной единицей*.

ДП 3◇7. Докажите, что фундаментальное решение (x_0, y_0) существует и единственно, причём дробь x_0/y_0 является подходящей дробью канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь.

ДП 3◇8. Докажите, что все *натуральные* решения уравнения Пелля исчерпываются числами $\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n\in\mathbb{N}$.

ДП 3◇9. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:
а) $x^2 - 5y^2 = 1\,$; **б)** $x^2 - 19y^2 = 1\,$; **в)** $x^2 - 43y^2 = 1\,$; **г)** $x^2 - 57y^2 = 1\,$.

[1] если любите программирование, можете написать программы для отыскания фундаментальных решений уравнения Пелля и разложения в цепные дроби чисел вида $x + y\sqrt{d}$ с $x, y, d \in \mathbb{Z}$