Вещественные квадратичные иррациональности

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n \neq p/q$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$) со знаменателем $m \leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n - m| > |\alpha q - p|$.

ДП 3◇1. Докажите, что любое иррациональное $\alpha\in\mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

ДП 3◇2. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей x/y с $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}\,.$$

ДП 3◇3. Нарисуйте кривые $x^2 - y^2 = 1$ и $x^2 - 3\,y^2 = 1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm1, 0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

ДП 3◇4. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2 - dy^2 \leqslant m$ **б)** уравнение $x^2 - dy^2 = m$ имело бесконечно много целых решений (x, y) с $x, y \neq 0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d\in\mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2-d) \simeq \{\, x + y\sqrt{d} \mid x, y, \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2-d) \simeq \{\, p + q\sqrt{d} \mid p, q, \in \mathbb{Z}\}$$

Число $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ называется *сопряжённым* к числу $\alpha = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, рациональное число $N(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \alpha\overline{\alpha} = x^2 - dy^2$ называется *нормой* числа α.

ДП 3◇5. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ является полем, сопряжение является его инволютивным автоморфизмом, а норма является гомоморфизмом мультипликативных групп. Выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$ и покажите, что для обратимости числа $\vartheta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ необходимо и достаточно, чтобы $N(\vartheta) = \pm1$.

ДП 3◇6 (группа единиц). Проверьте, что элементы нормы 1 образуют мультипликативную подгруппу в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (она называется *группой единиц* кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$).

Уравнение Пелля. Пусть натуральное $d \geqslant 2$ не делится на квадраты. Целочисленные решения *уравнения Пелля*: $x^2 - dy^2 = 1$ взаимно однозначно соответствуют элементам группы единиц кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Среди них имеются две *тривиальных единицы* ±1, отвечающие решениям $(\pm1, 0)$. Кроме того, с каждым решением (x, y) решениями будут также и все $(\pm x, \pm y)$. Решение (x_0, y_0) с *натуральными* x_0, y_0 называется *фундаментальным*, если вещественное число $x_0 + y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$. Соответствующая единица называется *фундаментальной единицей*.

ДП 3◇7. Докажите, что фундаментальное решение (x_0, y_0) существует и единственно, причём дробь x_0/y_0 является подходящей дробью канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь.

ДП 3◇8. Докажите, что все *натуральные* решения уравнения Пелля исчерпываются числами $\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n\in\mathbb{N}$.

ДП 3◇9. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:
а) $x^2 - 5y^2 = 1$; **б)** $x^2 - 19y^2 = 1$; **в)** $x^2 - 43y^2 = 1$; **г)** $x^2 - 57y^2 = 1$.

[1] если любите программирование, можете написать программы для отыскания фундаментальных решений уравнения Пелля и разложения в цепные дроби чисел вида $x + y\sqrt{d}$ с $x, y, d \in \mathbb{Z}$