Задача о трёх кузнечиках

Числа как направления. Всякое рациональное число можно (многими способами) записать в виде p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Будем изображать такую запись точкой с координатами (p, q) на верхней координатной полуплоскости. Это задаёт биекцию между множеством ненулевых рациональных чисел и множеством выходящих из начала координат лучей, имеющих рациональный тангенс угла наклона с осью OX.

Иррациональное вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ мы также будем изображать лучём $y = \alpha x$ с иррациональным тангенсом угла наклона α. С каждым таким лучом связаны две ломаные (см. рис. 1◇1), ограничивающие выпуклые оболочки всех целых точек, которые лежат, соответственно, над и под лучом $y = \alpha x$. Условимся обозначать вершины этих ломаных занумерованными подряд слева направо буквами T_i так, чтобы вершины нижней ломаной нумеровались чётными, а вершины верхней — нечётными целыми числами и чтобы *первое невертикальное* звено нижней ломаной называлось $[T_0T_2]$. Условимся также обозначать через (p_n, q_n) координаты вершины T_n, а через a_n — число кусков, на которые ребро $[T_{n-2}T_n]$ разбивается лежащими на нём целыми точками.

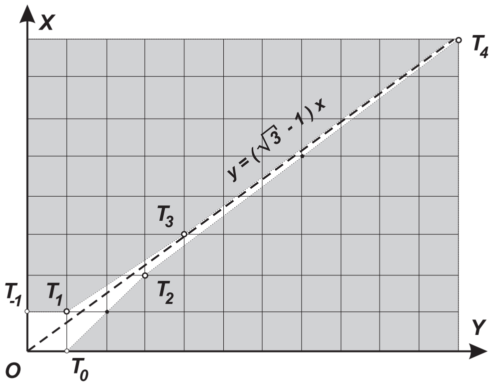

Рис. 1◇1. Иррациональный луч.

ДП 1◇1 (задача о трёх кузнечиках). Три кузнечика сидят в точках $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$ и могут прыгать в первом квадранте по следующему правилу: любому из двух крайних кузнечиков[1] (как левому так и правому) разрешается центрально симметрично перепрыгивать через среднего кузнечика. Верно ли, что:

а) кузнечики всегда образуют с началом координат параллелограмм площади 1, не накрывающий никаких других целых точек, кроме своих вершин;

б) кузнечики могут находиться только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с целыми взаимно простыми координатами имеется единственный алгоритм движения всех трёх кузнечиков, приводящий одного из них в эту точку;

г) для иррационального $\alpha > 0$ кузнечики последовательно посетят всех целые точки, лежащие на изображённых на рис. 1◇1 ломаных, если будут скакать из своего начального положения так, чтобы каждый раз прыгал крайний кузнечик, находящийся по одну сторону от луча $y = \alpha x$ со средним;

д) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны;

е) $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$

ж) $\begin{cases} p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2}q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n \end{cases}$

з) $\dfrac{1}{q_n\,(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

ДП 1◇2. Как изменятся ответы на последние шесть вопросов задачи о трёх кузнечиках, если в них взять $\alpha \in \mathbb{Q}$?

ДП 1◇3. Каждый отличный от начала координат узел клетчатой бумаги накрыли кругом радиуса $10^{-2008^{2009}}$ с центром в этом узле. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного такого круга?

ДП 1◇4. Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая[2] $r_0 = \alpha$, $a_0 = [r_0]$, и $r_{i+1} = 1/(r_i - a_i)$, $a_{i+1} = [r_{i+1}]$ для всех $i \geqslant 0$. Покажите, что получающиеся таким способом числа a_i равны тем, что были определены в начале листка и использовались в задаче о трёх кузнечиках.

---

[1] выпущенные из начала координат радиус векторы кузнечиков могут быть однозначно охарактеризованы как *левый*, *средний* и *правый*, если смотреть из начала координат внутрь первого координатного октанта

[2] здесь и далее $[x]$ означает целую часть x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x)