4. q-БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ.

q-факториалом числа n называется выражение $(q)_n = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$. q-биномиальным коэффициентом называется выражение $C_n^k(q) \stackrel{\text{def}}{=} q^{k(k+1)/2}\frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}} = \frac{q^{k(k+1)/2}(1-q^{n-k+1})\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k)}$.

Задача 1. Докажите, что $\lim_{q\to 0}(q)_n/(1-q)^n = n!$ и $C_n^k(1) = C_n^k$ (справа — обычный биномиальный коэффициент).

Задача 2. а) Вычислите $C_n^0(q)$ и $C_n^n(q)$. б) Докажите “q-тождество Паскаля” $C_n^k(q) = C_{n-1}^{k-1}(q) + q^{n-1}C_{n-1}^k(q)$. в) Докажите, что $C_n^k(q)$ —многочлен от q степени $k(n+1)$.

Задача 3. Докажите формулу “q-бинома Ньютона” $(1+qx)(1+q^2x)\dots(1+q^nx) = \sum_{k=0}^n C_n^k(q)x^k$.

Для произвольного конечного множества M натуральных чисел назовем его весом число q^s, где s — сумма чисел, входящих в M.

Задача 4. а) Докажите, что сумма весов всех множеств, состоящих из k чисел от 1 до n, равна $C_n^k(q)$. б) Пусть F_k — сумма весов всех подмножеств, состоящих из k чисел (без ограничений). Докажите, что $F_k(q) = F_{k-1}(q)/(1-q^k)$ и, следовательно, $F_k(q) = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}$. в) Выведите равенство пункта 4б по-другому — переходя в равенстве пункта 4а к пределу при $n\to\infty$.

Задача 5. а) Докажите, используя результат задачи 3 или явную формулу, тождество $C_n^k(q) = q^{k(k+1)}C_n^k(1/q)$. б) Выведите отсюда, что коэффициенты многочлена $C_n^k(q)$ симметричны относительно середины.

Задача 6. а) Найдите формулу, обобщающую равенство $C_n^k = C_n^{n-k}$. б) Подставьте эту формулу в q-тождество Паскаля.

Задача 7. а) Докажите, что в n-мерном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$ количество прямых, проходящих через начало координат, равно $C_n^1(q) = q + q^2 + \dots + q^n$. б) Вычислите в том же пространстве количество плоскостей, проходящих через начало координат. в) Докажите, что в этом пространстве количество k-мерных подпространств, проходящих через начало координат, равно $C_n^k(q)$.

Задача 8. Пусть x, y — две переменные, связанные соотношением $xy = qyx$. Докажите равенство $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n q^{-k(k+1)/2}C_n^k(q)x^ky^{n-k}$.

Рассмотрим бесконечные множества M целых чисел, обладающие следующим свойством (“существование хвоста”): существует N такое, что множество M содержит все числа $s \le -N$ и не более чем конечное число чисел $s > -N$. Назовем зарядом множества число $Z(M)$, равное количеству положительных чисел в M минус количество неположительных чисел, которые в M не входят. Энергией множества M назовем число $E(M)$, равное сумме положительных чисел, входящих в M, минус сумма неположительных чисел, в M не входящих. Очевидно, заряд и энергия конечны, причем энергия всегда неотрицательна.

Задача 9. а) Пусть $F_+(t,q) = \sum_M t^{Z(M)}q^{E(M)}$, где сумма берется по всем множествам M, содержащим все неположительные числа. Докажите, что $F_+(t,q) = \prod_{n=0}^\infty(1+tq^m)$. б) Пусть $F_-(t,q) = \sum_M t^{Z(M)}q^{E(M)}$, где сумма берется по всем множествам M, не содержащим положительных чисел. Докажите, что $F_-(t,q) = \prod_{n=1}^\infty(1+q^m/t)$. в) Пусть $F(t,q) = \sum_M t^{Z(M)}q^{E(M)}$, где сумма берется по всем множествам M (удовлетворяющим условию “существования хвоста”). Докажите, что $F(t,q) = F_+(t,q)F_-(t,q)$.

Задача 10. а) Выведите из результата задачи 4 формулу $F_+(t,q) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^kq^{k(k+1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^k)}$, где функция $F_+(t,q)$ определена в задаче 9а. б) Пусть $F_+^{(N)}(t,q) = \sum_M t^{Z(M)}q^{E(M)}$, где сумма берется по всем множествам M, содержащим все числа $s \le -N$ (так что по определению $F_+(t,q) = F_+^{(0)}(t,q)$). Докажите, что $F_+^{(N)}(t,q) = \sum_{k=-N}^\infty \frac{t^kq^{k(k+1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^{k+N})}$. в) Переходя к пределу в равенстве пункта 10б, докажите равенство $F(t,q) = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots}\sum_{k=-\infty}^\infty t^kq^{k(k+1)/2}$, где функция $F(t,q)$ определена в задаче 9в.

Из результатов задач 9 и 10 вытекает равенство $\sum_{k=-\infty}^\infty t^kq^{k(k+1)/2} = (1+t)\prod_{m=1}^\infty(1-q^m)(1+tq^m)(1+q^m/t)$, называемое тождеством Гаусса.

Задача 11. а) Выведите из тождества Гаусса тождество Эйлера $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots = \sum_{k=-\infty}^\infty(-1)^kq^{(3k^2+k)/2}$. б) Выведите из тождества Гаусса тождество $(1-q)^3(1-q^2)^3(1-q^3)^3\dots = \sum_{k=0}^\infty(-1)^k(2k+1)q^{k(k+1)/2}$.