# 3. ЗАДАЧИ О ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЯХ

В каждой из приведенных ниже задач:

1) Сформулируйте (если необходимо) и докажите тождество.
2) Дайте комбинаторную интерпретацию всех коэффициентов в левой и правой части.
3) Сформулируйте полученный комбинаторный результат.

*Пример* 1. Тождество $(1+q+q^2+\dots+q^9)(1+q^{10}+q^{20}+\dots+q^{90})\dots = 1+q+q^2+q^3+\dots$

1) $1+q+q^2+\dots+q^9 = \frac{1-q^{10}}{1-q}$, $1+q^{10}+q^{20}+\dots+q^{90} = \frac{1-q^{100}}{1-q^{10}}$, и т.д., откуда левая часть равна $\frac{1-q^{10}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{100}}{1-q^{10}}\cdot\dots = \frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+\dots$
2) Коэффициент при $q^n$ в левой части равен количеству способов представить $n$ в виде суммы $a_1+10a_2+100a_3+\dots$, где $a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$, то есть количеству способов записать число $n$ в десятичной системе счисления. Коэффициент в правой части равен 1.
3) Каждое натуральное число единственным образом записывается в десятичной системе счисления.

**Задача 1.** $\frac{q}{1-q}+\left(\frac{q}{1-q}\right)^2+\left(\frac{q}{1-q}\right)^3+\dots = q+2q^2+4q^3+\dots+2^nq^{n-1}+\dots$

**Указание.** $\frac{q}{1-q} = q+q^2+q^3+\dots$ (это нужно для комбинаторной интерпретации).

**Задача 2.** $\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots} = 1+q+2q^2+\dots+p(n)q^n+\dots$, где $p(n)$ — количество диаграмм Юнга из $n$ клеток, т.е. количество представлений числа $n$ в виде суммы целых положительных слагаемых, записанных в порядке возрастания (нестрогого).

**Задача 3.** $P'(q) = P(q)\Sigma(q)$, где $P(q)$ — функция из задачи 2, а $\Sigma(q) = 1+q+2q^2+\dots+d(n)q^n+\dots$, где $d(n)$ — количество натуральных делителей числа $n$ (считая 1 и само $n$).

**Задача 4.** $(1+qs)(1+qs^2)(1+qs^4)\dots$

**Задача 5.** $(1+s)(1+s^2)(1+s^3)(1+s^4)\dots = \frac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots}$.

**Задача 6.** $\frac{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)\dots}{(1+s)(1+s^2)(1+s^3)\dots} = 1-2s+2s^4-2s^9+\dots$

**Задача 7.** $\frac{(1-s^2)(1-s^4)(1-s^6)\dots}{(1-s)(1-s^3)(1-s^5)\dots} = 1+s+s^3+s^6+s^{10}+\dots$