2. КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ можно упростить подстановкой: если заменить $x \mapsto x - a/3$, то коэффициент при x^2 обнулится, и мы получим уравнение

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

Имеем: $\lim_{x\to+\infty} x^3+px+q = \lim_{x\to+\infty} x^3(1+p/x^2+q/x^3) = +\infty$, и аналогично $\lim_{x\to-\infty} x^3+px+q = -\infty$. Поэтому при достаточно больших положительных x имеем $x^3 + px + q > 0$, а при достаточно больших по модулю отрицательных — $x^3 + px + q < 0$. Из непрерывности квадратного трехчлена $f(x) = x^3 + px + q$ следует теперь, что у уравнения (1) имеется по крайней мере одно решение.

Из равенства $f'(x) = 3x^2+p$ вытекает, что при $p \geq 0$ функция f монотонна, и тем самым корень уравнения (1) единствен. Если же $p < 0$, то точки $x_1 = -\sqrt{-p/3}$ и $x_2 = \sqrt{-p/3}$ являются точками локального экстремума f (x_1 — максимума, x_2 — минимума). В этом случае у f три интервала монотонности, и уравнение (1) имеет не более трех решений.

Точнее говоря, решений три, если $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют разный знак, т.е. $f(x_1)f(x_2) < 0$, что равносильно неравенству $D \overset{\text{def}}{=} 4p^3 + 27q^2 < 0$. Заметим, что при $p > 0$ автоматически $D > 0$, так что условие $D < 0$ — необходимое и достаточное для того, чтобы уравнение имело три корня.

1. Формула Кардано для решения уравнения (1)

Будем искать решения в виде $x = u + v$. Подставляя это значение в уравнение, получим $(u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + (u + v)(p + 3uv) + q = 0$. Таким образом, достаточно взять в качестве u и v решение системы уравнений

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -p/3. \end{cases}$$

Возведя второе уравнение в куб, получим, что u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения $t^2 + qt - p^3/27 = 0$, откуда $u^3, v^3 = -q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}$, то есть

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + \frac{1}{6\sqrt{3}}\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q/2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}\sqrt{D}}.$$

Это и есть формула Кардано.

Из нее сразу видно, что она работает (в действительных числах) только при $D \geq 0$, т.е. когда у уравнения имеется один корень (или два, в вырожденном случае $D = 0$).

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x^3 - 2x - 4 = 0$. Здесь $D = 400 > 0$, так что у уравнения один корень, и формула Кардано применима. Она дает $x = \sqrt[3]{1 + 10/3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1 - 10/3\sqrt{3}}$. С другой стороны, $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$, откуда вытекает, что единственный действительный корень уравнения равен 2. Следовательно, имеет место равенство

$$\sqrt[3]{1 + 10/3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{1 - 10/3\sqrt{3}} = 2.$$

Иными словами, формула Кардано нашла корень в неудовлетворительном виде, но зато привела к доказательству неочевидного тождества.

2. Тригонометрическая формула для решения уравнения (1)

Лемма 1. $\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi$.

Доказательство — упражнение.

Будем теперь искать решение уравнения (1) в виде $x = r\sin\varphi$. Подставляя в уравнение, получим $r^3\sin^3\varphi + pr\sin\varphi + q = -\frac{1}{4}r^3\sin 3\varphi + (pr + \frac{3}{4}r^3)\sin\varphi + q = 0$. Поэтому для решения уравнения достаточно положить $r = 2\sqrt{-p/3}$, а в качестве φ взять решение уравнения

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin 3\varphi = -q. \tag{2}$$

Это уравнение разрешимо, если $|q| \leq \left|\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right|$, что эквивалентно условию $D \leq 0$. Таким образом, тригонометрическая формула работает как раз тогда, когда не работает формула Кардано, т.е. в случаях, когда уравнение имеет три корня. Нетрудно убедиться, что эти три корня она и находит (поскольку период функции $\sin 3\varphi$ равен $2\pi/3$, функция $x = r\sin\varphi$ принимает в корнях уравнения (2) три различных значения).

Пример 2. Уравнение $x^3 - 7x - 6 = 0$; здесь $D = 4 \cdot 27 \cdot (-720) < 0$, так что тригонометрическая формула работает. Имеем $r = 2\sqrt{7/3}$, а уравнение (2) принимает вид $\sin 3\varphi = -\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}$, откуда корни уравнения

$$x_1 = \sin(\frac{1}{3}\arcsin(-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}), \quad x_2 = \sin(\frac{1}{3}\arcsin(-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{2\pi}{3}), \quad x_3 = \sin(\frac{1}{3}\arcsin(-\frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{4\pi}{3}). \tag{3}$$

С другой стороны, $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$, откуда вытекает, что корни уравнения равны -1, -2 и 3.

Упражнение. Какой из корней (3) равен -1, какой — -2 и какой — 3?