1. ГЛАВНОЕ СЕЧЕНИЕ КУБА

Символом $\mathbb{R}^n$ обозначается множество упорядоченных наборов (последовательностей) $(x_1, \dots, x_n)$ действительных чисел. n-мерным кубом называется подмножество $K_n \subset \mathbb{R}^n$, заданное системой неравенств $-1 \le x_1 \le 1, \dots, -1 \le x_n \le 1$. Гранью куба называется подмножество, полученное обращением нескольких неравенств в равенство. Вершина это грань, состоящая из одной точки.

Задача 1. а) Изобразите кубы размерностей 1, 2, 3, 4. Расставьте на рисунке координаты вершин. б) Перечислите вершины K_n; сколько их? в) Сформулируйте определение ребра (одномерной грани) K_n и опишите все ребра; сколько их? г) То же самое задание для двумерной, трехмерной, и т.д. грани. д) Сколько всего у K_n граней? е) Опишите грани куба и сформулируйте критерий того, что одна грань является подмножеством другой. ж) Сформулируйте критерий того, что две вершины K_n соединены ребром. з) Обобщите результат предыдущего пункта на грани произвольных размерностей.

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно лежит внутри некоторого куба $K_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -a \le x_1 \le a, \dots, -a \le x_n \le a\}$. *Выпуклым многогранником* называется ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое конечной системой нестрогих линейных неравенств (и равенств, но равенство $f = g$ можно заменить двумя неравенствами $f \le g$ и $g \le f$). Гранью многогранника называется его подмножество, полученное обращением нескольких неравенств в равенство.

Задача 2. а) Докажите, что множество $\{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \le 1\}$ является многогранником. Как называется этот многогранник при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$? б) Докажите, что круг $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ограничен, но не является многогранником.

Мы будем рассматривать многогранник $D_n = K_n \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Задача 3. Нарисуйте и назовите этот многогранник при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

Задача 4. Найдите вершины D_n а) при всех $n \le 4$; б) при всех n. в) Сколько существует вершин при данном n?

Задача 5. а) Пусть $n \le 4$. Опишите ребра D_n. Сформулируйте и докажите критерий того, что две данные вершины D_n соединены ребром. б) То же задание для произвольного n.

Задача 6. Дайте определение двумерной грани многогранника. Сколько сторон имеет каждая двумерная грань D_n?

Задача 7. а) Сколько вершин, ребер и двумерных граней имеет D_4? б) Нарисуйте D_4: изобразите его вершины (подписав координаты) и ребра, отметьте двумерные грани. Как называется многогранник D_4?

Расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ в $\mathbb{R}^n$ задается формулой $\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. *Движением* $\mathbb{R}^n$ называется преобразование $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояние: $\varrho(F(x), F(y)) = \varrho(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Флагом в многограннике Q называется набор его граней $S_0, S_1, \dots, S_k$, в которой S_0 — вершина, $S_k = Q$ (многогранник, очевидно, является своей собственной гранью), и $S_i \subset S_{i+1}$ для всех i (включение строгое!). В случае $k = 3$ имеем S_0 — “гво́здик”, S_1 — “древко” и S_2 — “полотнище” флага; отсюда название.

Задача 8. Сколько флагов имеется в D_n а) при $n \le 4$? б) при произвольном n?

Задача 9. а) Пусть $v_0 = (1, -1, 0)$ — вершина D_3. Докажите, что для любой вершины v существует движение $\mathbb{R}^3$, переводящее D_3 в себя, а v_0 в v. б) Докажите, что для любых двух вершин v_1, v_2 многогранника D_3 существует движение $\mathbb{R}^3$, переводящее D_3 в себя, а v_1 в v_2. в) Аналогичная задача для многогранника D_4.

Указание. Для решения этой задачи не обязательно знать *все* движения $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ — нужно лишь иметь достаточный запас. Вот два примера движений $\mathbb{R}^4$:

- Обмен местами двух первых координат: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_3, x_4)$.
- Смена знака всех координат: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$.

Такого рода движений вам должно хватить.

Задача 10. а) Пусть $v_0 = (1, 1, -1, -1)$ — вершина D_4, а $e_0 = \{(1, t, -t, -1) \mid -1 \le t \le 1\}$ — выходящее из нее ребро. Докажите, что для всякого ребра e, выходящего из v_0, существует движение $\mathbb{R}^4$, переводящее D_4 в себя, v_0 в себя, а e_0 в e. б) Докажите, что для любых двух ребер e_1, e_2, имеющих общую вершину v, существует движение $\mathbb{R}^4$, переводящее D_4 в себя, оставляющее v на месте и отображающее e_1 в e_2. в) Пусть e_1, e_2 — ребра D_4, а v_1, v_2 — их концы (вершины). Докажите, что существует движение $\mathbb{R}^4$, переводящее D_4 в себя, v_1 в v_2 и e_1 в e_2.

Задача 11. а) Пусть f_1, f_2 — две двумерные грани D_4, имеющие общее ребро e_0 (из задачи 10а). Докажите, что существует движение $\mathbb{R}^4$, переводящее D_4 в себя, оставляющее все точки ребра e_0 на месте и отображающее f_1 в f_2. б) Докажите, что для любых двух флагов $v_1 \subset e_1 \subset f_1 \subset D_4$ и $v_2 \subset e_2 \subset f_2 \subset D_4$ существует движение $\mathbb{R}^4$, переводящее один флаг в другой (т.е. v_1 в v_2, e_1 в e_2, f_1 в f_2 и D_4 в себя).

Многогранники со свойством, подобным задаче 11б, называются правильными. Тем самым D_4 — правильный многогранник.

Задача 12. а) Докажите, что D_3 — правильный многогранник. б) При каких a многогранник $D_4(a) = K_4 \cap \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1 + \cdots + x_4 = a\}$ является правильным? в) Докажите, что многогранник D_5 не является правильным (!).