ЗНАКОМСТВО

Нужны обоснованные решения, а не только ответы. Решать задачи можно в любом порядке, только сохраняйте исходный номер. Если формулировка задачи непонятна, спросите. Оценка за работу не ставится, ни на какие "рейтинги" работа не влияет.

Задача 1. Найдите суммы а) $3 + 6 + \dots + 3 \cdot 2^n$, б) $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 - \dots \pm \frac{1}{2^n}C_n^n$, в) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$, г) $1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n+1} + \dots$ (для тех значений t, при которых сумма конечна).

Задача 2. а) $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что $P(0)$ и $P(1)$ — нечетные числа. Докажите, что P не имеет целых корней. б) Придумайте аналогичную задачу, в которой вместо четности (делимости на 2) фигурировала бы делимость на 3.

Задача 3. а) Найдите все корни уравнения $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 9x - 2 = 0$. б) При каких p и q многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на $x^2 + x + 1$?

Задача 4. а) Сколькими нулями заканчивается десятичная запись числа 28! ? б) А троичная?

Задача 5. а) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества множества $\{1, 2, 3\}$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A_i — подмножество другого: существуют такие i, j, что $i \neq j$ и $A_i \subseteq A_j$. б) Аналогичная задача про подмножества $A_1, \dots, A_7$ множества $\{1, 2, 3, 4\}$.

Задача 6. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z + t = n$? (Число n — целое неотрицательное; x, y, z, t — переменные.)

Задача 7. Вычислите явно а) $\sqrt{1+i}$, б) $(1+i)^{50}$.

Задача 8. Преобразование f действует на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ по закону: $f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 3, f(4) = 6, f(5) = 4, f(6) = 1, f(7) = 2$. Какое преобразование получится, если повторить f 2008 раз?