Геометрия, листок 10.

В этом листке **стандартным кубом** называется куб с вершинами в точках $(\pm1; \pm1; \pm1)$.

1) Придумайте треугольник, вершины которого имеют целые координаты, а стороны не параллельны координатным плоскостям, углы которого равны
а) 60°, 60°, 60°; б) 45°, 45°, 90°; в)30°, 60°, 90°.

2) Для каких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует вектор $\vec{v}$ такой, что $[\vec{a}, \vec{v}] = \vec{b}$? Опишите в этом случае все возможные векторы $\vec{v}$.

3) а) Дан параллелограмм A с площадью S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям параллелограмма A.
б) Дан параллелелепипед A с объемом V. Найти объем параллелелепипеда, ребра которого равны и параллельны диагоналям трех смежных граней параллелелепипеда A, проведенным из одной вершины.
*в) В n-мерном евклидовом пространстве дан n-мерный параллелелепипед A с объемом V. Доказать, что у A имеется ровно n попарно не параллельных граней размерности $n-1$. Найти объем n-мерного параллелелепипеда, ребра которого равны и параллельны диагоналям n смежных граней n-мерного параллелелепипеда A, проведенным из одной вершины.

4) Докажите, что $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$. Каков геометрический смысл этого равенства?

5) Докажите тождество Якоби для векторного произведения: $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0$.

6) а) Дан ненулевой вектор $\vec{a}$ с целыми координатами. Доказать, что существует ненулевой вектор с целыми координатами, перпендикулярный вектору $\vec{a}$.
б) Даны два ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целыми координатами. Доказать, что существует ненулевой вектор с целыми координатами, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7) а) Докажите, что целочисленные векторы плоскости $ax + by + cz = 0$ образуют полную решетку на этой плоскости тогда и только тогда, когда числа a, b и c соизмеримы (т.е. пропорциональны трем целым числам).
Приведите пример целых чисел a, b и c таких, что эта решетка б) гексагональная; в) прямоугольная; *г) ромбическая.

8) а) На плоскости даны три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда числа x_1, y_1, x_2, y_2,x_3 и y_3 удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению.
б) Запишите это уравнение, таким образом, чтобы его вид не менялся при перестановке точек A, B и C. (Подсказка: используйте определитель.)
в-г) Те же задачи для условия того, что четыре точки трехмерного пространства лежат в одной плоскости.

9) а) Напишите уравнения граней октаэдра, центрами граней которого являются вершины стандартного куба.
б) Какой многогранник получится, если от стандартного куба отрезать все его восемь вершин плоскостями $\pm x \pm y \pm z = 1$? Перечислите все его вершины, ребра и грани.
в) Тот же вопрос для плоскостей $\pm x \pm y \pm z = 2$.
г) 12 граней выпуклого многогранника содержатся плоскостях, проходящих через каждое ребро стандартного куба параллельно двум несмежным с этим ребром диагоналям куба. Найдите вершины этого многогранника, определите количество и длины его ребер, а также углы всех многоугольников, являющихся его гранями.

10) На стандартном кубе отмечены вершины и середины граней. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три отмеченные точки и отсекающей от стандартного куба многоугольник C. Найдите координаты проекции начала координат на эту плоскость.
а) C — правильный треугольник; б) C — неправильный треугольник;
в) C — трапеция (не параллелограмм); г) C — пятиугольник; д) C — шестиугольник.

11) В условиях предыдущей задачи напишите уравнения (канонические и параметрические) прямой l и найдите проекцию начала координат на прямую l.
а) l – диагональ стандартного куба; б) l — диагональ грани стандартного куба;

в) l проходит через две середины ребер стандартного куба, но не параллельна ни одной его грани и не проходит через начало координат;
г) l содержит отрезок длины 3 с концами в отмеченных точках.

12) Напишите уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся диагонали смежных граней стандартного куба под прямым углом. Докажите, что такая прямая единственна. Найдите расстояние между этими диагоналями.

13) Конусом над плоской кривой C называется геометрическое место точек, лежащих на прямых, проходящих через фиксированную точку O и точки кривой C. (Случай, когда точка O лежит в плоскости кривой C неинтересен, потому что в этом случае получается просто эта плоскость.) Выберем в качестве точки O начало координат, а кривую будем брать в плоскости, заданной уравнением $z = 1$. В каждом из перечисленных случаев напишите уравнение конуса и выясните, является ли он прямым круговым конусом.
а) C — парабола $y = x^2$; б) C — гипербола $xy = 1$; в) C — гипербола $x^2 - y^2 = 1$;
г) C — гипербола $x^2 - y^2 = 1$; д) C — кривая $2x^2 + y^2 = 4x$.

14) Напишите уравнения (канонические и параметрические) прямой, пересекающей ось OZ в точке a и пресекающей две прямые, содержащие две скрещивающиеся диагонали граней куба, пересекающие ось OX.

15) Найдите уравнение геометрического места точек, лежащих на всевозможных прямых, пересекающих ось OZ и две прямые, содержащие две скрещивающиеся диагонали граней куба, пересекающие ось OX.

16) Прямые l_1, l_2, l_3, l_4 содержат попарно скрещивающиеся диагонали вертикальных граней куба. Докажите, что через любую точку прямой l_1 проходит единственная прямая m, пересекающая прямые l_2 и l_3. Докажите, что любая такая прямая m, за исключением одной (какой?), пересекает также прямую l_4.

17) Найдите уравнение геометрического места точек, лежащих на всевозможных прямых m из предыдущей задачи.

18) Точка $A(x_0; y_0; z_0)$ лежит на поверхности второго порядка, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$. Прямая, заданная параметрческими уравнениями $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$, $z = z_0 + \gamma t$ называется *касательной* к этой поверхности, если $t = 0$ является не менее чем двукратным корнем уравнения $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t$. Покажите, что если поверхность является эллипсоидом, параболоидом, гиперболоидом, цилиндром над коническим сечением или конусом (в последнем случае предполагается, что точка A не является его вершиной), то множество касательных прямых, проходящих через точку A, лежит в некоторой плоскости. Эта плоскость называется *касательной* к этой поверхности в точке A. Докажите, что касательная плоскость пересекает поверхность
а) по одной прямой (какой?), если поверхность является конусом или цилиндром;
б) по двум пересекающимся прямым, если поверхность является однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом;
в) только в точке A во всех остальных случаях.

19) а) Докажите, что поверхность, заданная уравнением $z^2 = xy$ является конусом. Является ли он прямым круговым конусом?
б) Напишите уравнение произвольной прямой, лежащей на этой поверхности.

20) а) Докажите, что поверхность, заданная уравнением $z = xy$ является гиперболическим параболоидом.
б) Напишите уравнения двух лежащих на этой поверхности прямых, проходящих через точку $(a; b; ab)$.

21) а) Напишите уравнение любой плоскости, пересекающей поверхность $z = xy$ по параболе.
б) Напишите уравнения всех таких плоскостей.
в) Напишите уравнение любой плоскости, пересекающей однополостной гиперболоид по параболе.

22) Перечислите все нетривиальные типы поверхностей второго порядка, сечение которых плоскостью
а) не может быть эллипсом; б) не может быть параболой; в) не может быть гиперболой.