

## Геометрия, листок 10.

В этом листке **стандартным кубом** называется куб с вершинами в точках  $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ .

1) Придумайте треугольник, вершины которого имеют целые координаты, а стороны не параллельны координатным плоскостям, углы которого равны

а)  $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ ; б)  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ; в)  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

2) Для каких векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  существует вектор  $\vec{v}$  такой, что  $[\vec{a}, \vec{v}] = \vec{b}$ ? Опишите в этом случае все возможные векторы  $\vec{v}$ .

3) а) Дан параллелограмм  $A$  с площадью  $S$ . Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям параллелограмма  $A$ .

б) Дан параллелепипед  $A$  с объемом  $V$ . Найти объем параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны диагоналям трех смежных граней параллелепипеда  $A$ , проведенным из одной вершины.

\*в) В  $n$ -мерном евклидовом пространстве дан  $n$ -мерный параллелепипед  $A$  с объемом  $V$ . Доказать, что у  $A$  имеется ровно  $n$  попарно не параллельных граней размерности  $n - 1$ . Найти объем  $n$ -мерного параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны диагоналям  $n$  смежных граней  $n$ -мерного параллелепипеда  $A$ , проведенным из одной вершины.

4) Докажите, что  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ . Каков геометрический смысл этого равенства?

5) Докажите тождество Якоби для векторного произведения:  $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0$ .

6) а) Дан ненулевой вектор  $\vec{a}$  с целыми координатами. Доказать, что существует ненулевой вектор с целыми координатами, перпендикулярный вектору  $\vec{a}$ .

б) Даны два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с целыми координатами. Доказать, что существует ненулевой вектор с целыми координатами, перпендикулярный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

7) а) Докажите, что целочисленные векторы плоскости  $ax + by + cz = 0$  образуют полную решетку на этой плоскости тогда и только тогда, когда числа  $a, b$  и  $c$  соизмеримы (т.е. пропорциональны трем целым числам).

Приведите пример целых чисел  $a, b$  и  $c$  таких, что эта решетка б) гексагональная; в) прямоугольная; \*г) ромбическая.

8) а) На плоскости даны три точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  и  $C(x_3; y_3)$ . Докажите, что точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда числа  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3$  и  $y_3$  удовлетворяют некоторому алгебраическому уравнению.

б) Запишите это уравнение, таким образом, чтобы его вид не менялся при перестановке точек  $A, B$  и  $C$ . (Подсказка: используйте определитель.)

в-г) Те же задачи для условия того, что четыре точки трехмерного пространства лежат в одной плоскости.

9) а) Напишите уравнения граней октаэдра, центрами граней которого являются вершины стандартного куба.

б) Какой многогранник получится, если от стандартного куба отрезать все его восемь вершин плоскостями  $\pm x \pm y \pm z = 1$ ? Перечислите все его вершины, ребра и грани.

в) Тот же вопрос для плоскостей  $\pm x \pm y \pm z = 2$ .

г) 12 граней выпуклого многогранника содержатся в плоскостях, проходящих через каждое ребро стандартного куба параллельно двум несмежным с этим ребром диагоналям куба. Найдите вершины этого многогранника, определите количество и длины его ребер, а также углы всех многоугольников, являющихся его гранями.

10) На стандартном кубе отмечены вершины и середины граней. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три отмеченные точки и отсекающей от стандартного куба многоугольник  $C$ . Найдите координаты проекции начала координат на эту плоскость.

а)  $C$  — правильный треугольник; б)  $C$  — неправильный треугольник;

в)  $C$  — трапеция (не параллелограмм); г)  $C$  — пятиугольник; д)  $C$  — шестиугольник.

11) В условиях предыдущей задачи напишите уравнения (канонические и параметрические) прямой  $l$  и найдите проекцию начала координат на прямую  $l$ .

а)  $l$  — диагональ стандартного куба; б)  $l$  — диагональ грани стандартного куба;

в)  $l$  проходит через две середины ребер стандартного куба, но не параллельна ни одной его грани и не проходит через начало координат;

г)  $l$  содержит отрезок длины 3 с концами в отмеченных точках.

**12)** Напишите уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся диагонали смежных граней стандартного куба под прямым углом. Докажите, что такая прямая единственна. Найдите расстояние между этими диагоналями.

**13)** Конусом над плоской кривой  $C$  называется геометрическое место точек, лежащих на прямых, проходящих через фиксированную точку  $O$  и точки кривой  $C$ . (Случай, когда точка  $O$  лежит в плоскости кривой  $C$  неинтересен, потому что в этом случае получается просто эта плоскость.) Выберем в качестве точки  $O$  начало координат, а кривую будем брать в плоскости, заданной уравнением  $z = 1$ . В каждом из перечисленных случаев напишите уравнение конуса и выясните, является ли он прямым круговым конусом.

а)  $C$  — парабола  $y = x^2$ ; б)  $C$  — гипербола  $xy = 1$ ; в)  $C$  — гипербола  $x^2 - y^2 = 1$ ;

г)  $C$  — гипербола  $x^2 - y^2 = 1$ ; д)  $C$  — кривая  $2x^2 + y^2 = 4x$ .

**14)** Напишите уравнения (канонические и параметрические) прямой, пересекающей ось  $OZ$  в точке  $a$  и пересекающей две прямые, содержащие две скрещивающиеся диагонали граней куба, пересекающие ось  $OX$ .

**15)** Найдите уравнение геометрического места точек, лежащих на всевозможных прямых, пересекающих ось  $OZ$  и две прямые, содержащие две скрещивающиеся диагонали граней куба, пересекающие ось  $OX$ .

**16)** Прямые  $l_1, l_2, l_3, l_4$  содержат попарно скрещивающиеся диагонали вертикальных граней куба. Докажите, что через любую точку прямой  $l_1$  проходит единственная прямая  $m$ , пересекающая прямые  $l_2$  и  $l_3$ . Докажите, что любая такая прямая  $m$ , за исключением одной (какой?), пересекает также прямую  $l_4$ .

**17)** Найдите уравнение геометрического места точек, лежащих на всевозможных прямых  $m$  из предыдущей задачи.

**18)** Точка  $A(x_0; y_0; z_0)$  лежит на поверхности второго порядка, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ . Прямая, заданная параметрическими уравнениями  $x = x_0 + \alpha t, y = y_0 + \beta t, z = z_0 + \gamma t$  называется *касательной* к этой поверхности, если  $t = 0$  является не менее чем двукратным корнем уравнения  $F(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t)$ . Покажите, что если поверхность является эллипсоидом, параболоидом, гиперболоидом, цилиндром над коническим сечением или конусом (в последнем случае предполагается, что точка  $A$  не является его вершиной), то множество касательных прямых, проходящих через точку  $A$ , лежит в некоторой плоскости. Эта плоскость называется *касательной* к этой поверхности в точке  $A$ . Докажите, что касательная плоскость пересекает поверхность

а) по одной прямой (какой?), если поверхность является конусом или цилиндром;

б) по двум пересекающимся прямым, если поверхность является однополостным гиперболоидом или гиперболическим параболоидом;

в) только в точке  $A$  во всех остальных случаях.

**19)** а) Докажите, что поверхность, заданная уравнением  $z^2 = xy$  является конусом. Является ли он прямым круговым конусом?

б) Напишите уравнение произвольной прямой, лежащей на этой поверхности.

**20)** а) Докажите, что поверхность, заданная уравнением  $z = xy$  является гиперболическим параболоидом.

б) Напишите уравнения двух лежащих на этой поверхности прямых, проходящих через точку  $(a; b; ab)$ .

**21)** а) Напишите уравнение любой плоскости, пересекающей поверхность  $z = xy$  по параболе.

б) Напишите уравнения всех таких плоскостей.

в) Напишите уравнение любой плоскости, пересекающей однополостной гиперболоид по параболе.

**22)** Перечислите все нетривиальные типы поверхностей второго порядка, сечение которых плоскостью

а) не может быть эллипсом; б) не может быть параболой; в) не может быть гиперболой.