ГЕОМЕТРИЯ, ЛИСТОК 9

1. а) Докажите равенство $\det\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{i1} & a_{12}+\lambda a_{i2} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (i — произвольное число от 1 до n, λ — произвольное число). б) Применяя преобразования, описанные в пункте 1а, приведите матрицу $\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ к верхнетреугольному виду (когда ниже главной диагонали стоят нули) и найдите ее определитель. в*) Тот же вопрос про матрицу $\begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

2. а) Докажите, что определитель матрицы 3×3 равен нулю тогда и только тогда, когда векторы, координаты которых записаны в строках матрицы, линейно зависимы. б) Найдите определитель $W = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$. в) Докажите, что определитель $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^k & x_2^k & x_3^k \\ x_1^l & x_2^l & x_3^l \end{pmatrix}$ при любых k и l делится на W из пункта 2б. г*) Найдите определитель $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, соответствующий матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Постройте параллелограммы, сооответствующие матрицам $\begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Докажите геометрическими методами, что площади всех этих параллелограммов равны.

4. а) Пусть $ABCD$ — параллелограмм; обозначим $v_1 = \vec{AB}$, $v_2 = \vec{AD}$. Докажите, что определитель $\det\begin{pmatrix} (v_1,v_1) & (v_1,v_2) \\ (v_2,v_1) & (v_2,v_2) \end{pmatrix}$ равен квадрату площади параллелограмма. Обратите внимание, что результат остается верен, когда параллелограмм лежит в трехмерном пространстве! б) Пусть $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — параллелепипед; обозначим $v_1 = \vec{A_1B_1}$, $v_2 = \vec{A_1D_1}$, $v_3 = \vec{A_1A_2}$. Докажите, что определитель матрицы 3×3, где на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит скалярное произведение (v_i, v_j), равен квадрату объема параллелепипеда. в*) Пусть $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Докажите, что определитель матрицы $n\times n$, где на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит скалярное произведение $(v_i, v_j) = a_{i1}a_{j1} + \dots + a_{in}a_{jn}$, равен квадрату определителя матрицы, составленной из строк $v_1, \dots, v_n$.

5. Пусть $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,2)$ и $C = (-1,2,1)$. а) Найдите (задайте уравнением) геометрическое место точек D таких, что объем тетраэдра $ABCD$ равен 1. б) Для каждого такого тетраэдра вычислите радиус вписанного шара. в) Для какой точки D радиус вписанного шара наибольший? г) Опишите уравнения всех плоскостей, параллельных ребрам AB и CD тетраэдра. д) Для каждой плоскости из пункта 5г найдите площадь ее пересечения с тетраэдром. Для какой плоскости эта площадь наибольшая?

6. а) На каждой стороне треугольника построили вектор, ей перпендикулярный (направленный вовне) и равный по длине. Докажите, что сумма построенных векторов равна нулю. б) Тот же вопрос про произвольный многоугольник. в) На каждой грани тетраэдра построили вектор, ей перпендикулярный (направленный вовне), длина которого равна ее площади. Докажите, что сумма построенных векторов равна нулю. г) Тот же вопрос про выпуклый октаэдр. д*) Тот же вопрос про произвольный выпуклый многогранник, все грани которого — треугольники. е*) Тот же вопрос про произвольный выпуклый многогранник.