Геометрия, листок 8.

Определение Подгруппа $G \subset E(2)$ группы движений плоскости называется дискретной, если орбита любой точки дискретна.

1) Докажите, в любом круге содержится не более чем конечное множество точек одной орбиты дискретной группы.

2) Докажите, что следующий список представляет собой полную классификацию конечных подгрупп в $E(2)$:
а) группа из двух элементов (каких?);
б) группа $C_n(P)$ вращений, сохраняющих некоторый правильный многоугольник P;
в) группа $D_n(P)$ вращений и симметрий, сохраняющих некоторый правильный многоугольник P.

3) Докажите, что дискретная группа, не содержащая параллельных переносов, конечна.

4) Докажите, что если дискретная группа содержит поворот $r_{A,\varphi}$, то $\varphi = 360^\circ \cdot k/n$, где k и n — натуральные числа.

5) Докажите, что если дискретная группа состоит только из параллельных переносов, то она представляет собой группу T_L параллельных переносов на векторы некоторой решетки L.

6) Многоугольник $\mathcal{M}$ называется фундаментальной областью дискретной группы $G \subset E(2)$, если он содержит точки любой орбиты, но при этом никакие две его внутренние точки не лежат в одной орбите. (Иногда при определении фундаментальной области не требуют, чтобы она представляла собой именно многоугольник, но для наших целей достаточно рассматривать только многоугольные фундаментальные области.)
а) Пусть L — некоторая полная решетка, а $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — какой-нибудь ее базис. Докажите, что параллелограмм со сторонами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ является фундаментальной областью группы параллельных переносов T_L.
б) Докажите, что многоугольник Вороного (см. листок 7, задача 11) решетки L также является фундаментальной областью группы параллельных переносов T_L.
в) Докажите, что для всевозможных движений $g \in G$ многоугольники $g(\mathcal{M})$ не имеют общих внутренних точек и заполняют всю плоскость.
г) Придумайте три различных фундаментальных многоугольника для квадратной решетки, не совпадающих с описанными в предыдущих пунктах.

7) **Продолжение задачи 7.10.** Рассмотрим решетку L и обозначим соответствующую ей группу параллельных переносов T_L через Λ (т.е. $\Lambda = T_L$.) Обозначим орбиту какой-нибудь точки A плоскости через $\Lambda \cdot A$. Докажите, что группа $\Gamma_{L,A}$ всех движений плоскости, переводящих множество $\Lambda \cdot A$ в себя, является дискретной группой. Для каждого типа решетки нарисуйте ее фундаментальную область группы $\Gamma_{L,A}$.

8) **Группы, порожденные отражениями.** Пусть Φ — выпуклый многоугольник на плоскости, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — прямые, содержащие все его стороны. Обозначим через Γ_Φ подгруппу группы $E(2)$, порожденную зеркальными симметриями $s_{l_1}, s_{l_2}, \ldots, s_{l_n}$. Перечислите все такие многоугольники Φ, что, во-первых, группа Γ_Φ дискретна, и, во-вторых, все внутренние точки многоугольника Φ принадлежат разным орбитам группы Γ_Φ.

9) Сравните списки дискретных групп, полученные в предыдущих двух задачах. Какие группы, порожденные отражениями, получились в ответе к задаче 7? Верно ли, что любая группа, порожденная отражениями, является подгруппой одной из групп, полученных в задаче 7?

10) Придумайте бесконечную дискретную группу движений плоскости, отличную от групп, полученных в предыдущих задачах.

11) Пусть $G \subset E(2)$ — бесконечная дискретная группа движений плоскости. Докажите, что множество ее параллельных переносов $\Lambda_G = G \cap \mathbb{T}$ представляет собой нормальную подгруппу в G. Выведите из результатов предыдущей задачи, что Λ_G представляет собой группу T_{L_G} параллельных переносов на векторы некоторой решетки L_G. (В физике решетка L_G называется *решеткой Браве.*)

Теорема Бибербаха утверждает, что в обозначениях предыдущей задачи фактор-группа G/Λ_G **конечна**. Эта теорема имеет обобщение на многомерный случай. В случае же плоскости мы в последующих задачах не только докажем эту теорему, но и сможем сказать, какие фактор-группы могут получиться. А это, в свою очередь, дает полную классификацию дискретных групп движений плоскости.

12) Пусть $G \subset E^{\circ}(2)$ — бесконечная дискретная группа собственных движений плоскости, не совпадающая со своей подгруппой параллельных переносов $\Lambda_G = T_{L_G}$. (Мы сохраняем обозначения предыдущих задач.)

а) Докажите, что если решетка Λ_G полная, но не квадратная и не гексагональная, то G может содержать только повороты на 180°.

б) Докажите, что если решетка Λ_G полная, не квадратная и не гексагональная, то G совпадает с группой $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7, где в качестве точки A взят центр любого поворота на 180°, принадлежащего группе G. Докажите, что G состоит в точности из параллельных переносов на векторы решетки L_G и центральных симметрий с центрами во всех точках, полученных из точки A параллельными переносами на половины векторов из решетки L_G. Нарисуйте фундаментальную область группы G.

в) Докажите, что если решетка Λ_G квадратная, то G может содержать только повороты на углы, кратные 90°.

г) Докажите, что если решетка Λ_G квадратная, а G не содержит поворотов на 90° и содержит поворот на 180° относительно некоторой точки A, то G является подгруппой группы $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7, состоящей из всех ее параллельных переносов и центральных симметрий. Покажите, что центры всех центральных симметрий группы G получаются из точки A параллельными переносами на половины векторов из решетки L_G. Нарисуйте фундаментальную область группы G.

д) Докажите, что если решетка $Ł_G$ квадратная, и G содержит поворот на 90° относительно некоторой точки A, то G является подгруппой собственных движений группы $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7. Перечислите в этом случае все движения группы G. Нарисуйте фундаментальную область группы G.

е) Докажите, что если решетка Λ_G гексагональная, то G является подгруппой собственных движений группы $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7. Докажите, что для группы G имеются всего три возможности: когда G содержит только повороты на 180°, когда G содержит только повороты на 120°, и, наконец, когда G содержит повороты на 60°. Перечислите в каждом из этих случаев все движения группы G и нарисуйте фундаментальную область группы G.

ж) Опишите все возможные группы G в случае, когда решетка $Ł_G$ неполная. Нарисуйте фундаментальную область группы G.

13) Пусть $G \subset E^{\circ}(2)$ — бесконечная дискретная группа собственных движений плоскости, не совпадающая со своей подгруппой параллельных переносов $\Lambda_G = T_{L_G}$. (Мы сохраняем обозначения предыдущих задач.) Докажите, что группа G является подгруппой группы $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7 при некотором выборе точки A. Докажите, что фактор-группа G/Λ_G при этом может быть только циклической группой порядка 2, 3 или 6.

14) **Рисование фундаментальных областей помогает находить фактор-группу.** Пусть Γ — дискретная группа с фундаментальной областью $\mathcal{M}_\Gamma$, G — ее нормальная подгруппа, причем фактор-группа Γ/G конечна. Предположим, что элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ группы G таковы, что многоугольники $g_1(\mathcal{M}_\Gamma), g_2(\mathcal{M}_\Gamma), \ldots, g_n(\mathcal{M}_\Gamma)$ не имеют общих внутренних точек и $g_1(\mathcal{M}_\Gamma) \cup g_2(\mathcal{M}_\Gamma) \cup \ldots \cup g_n(\mathcal{M}_\Gamma)$ представляет собой фундаментальную область группы G. Докажите, что тогда смежные классы $g_1G, g_2G, \ldots, g_nG$ все различны и представляют собой все смежные классы Γ/G. (Другими словами, $\Gamma/G = \{g_1G, g_2G, \ldots, g_nG\}$.)

15) Докажите, что дискретная группа G может содержать несобственные движения только в случае, когда решетка $Ł_G$ является либо прямоугольной (в частности, квадратной), либо ромбической (в частности, гексагональной), либо неполной.

16) а) Приведите пример дискретной группы, содержащей несобственные движения, но не содержащей зеркальных симметрий.

б) Может ли такая группа содержать повороты?

17) Докажите, что любая бесконечная дискретная группа движений плоскости является подгруппой группы $\Gamma_{L_G,A}$ из задачи 7 при некотором выборе точки A.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА: Найти группу Γ движений, сохраняющих данный узор и ее подгруппу параллельных переносов Λ. Найти фактор-группу Γ/Λ. Нарисовать фундаментальные области групп Γ и Λ и многоугольник Вороного решетки Λ.