Геометрия, листок 7.

1) Зафиксируем два непропорциональных вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Докажите, что множества $L(\vec{u},\vec{v}) = \{m\vec{u}+n\vec{v}\ ,\ m,n\in\mathbb{Z}\}$ и $L(\vec{u}) = \{m\vec{u}\ ,\ m\in\mathbb{Z}\}$ являются коммутативными группами (относительно операции сложения векторов).

   Определение. *Решеткой* называется группа $L(\vec{u})$ или группа $L(\vec{u},\vec{v})$; при этом решетка $L(\vec{u})$ называется *неполной*, а решетка $L(\vec{u},\vec{v})$ называется *полной решеткой*. Пара векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называется *базисом* решетки $L(\vec{u},\vec{v})$; аналогично вектор $\vec{u}$ называется *базисом* решетки $L(\vec{u})$.

2) а) Нарисуйте решетку $L(\vec{u},\vec{v})$ для $\vec{u} = (1;0)$ и $\vec{v} = (0;1)$. Докажите, что пара векторов $\vec{u}' = (3;2)$, $\vec{v}' = (4;3)$ тоже является базисом этой решетки, т.е что $L(\vec{u},\vec{v}) = L(\vec{u}',\vec{v}')$.
   б) Найдите еще три разных базиса для решетки $L((1;0),(0;1))$.
   в) То же задание для решетки $L((1;0),(-1/2;\sqrt{3}/2))$.

3) Пусть L — некоторая решетка, рассмотрим множество параллельных переносов на векторы решетки: $T_L = \{t_{\vec{u}}\ ,\ \vec{u}\in L\}$. Докажите, что T_L является подгруппой группы всех движений плоскости относительно операции композиции движений. Докажите, что группы L и T_L изоморфны, причем изоморфизм задается сопоставлением каждому вектору $\vec{u}$ соответствующего ему параллельного переноса $t_{\vec{u}}$.

   Предостережение. Группы параллельных переносов T_L тоже часто называют решетками. Будьте внимательны: такое смешение терминологии может приводить к недоразумениям!!!

4) Дана полная решетка $L = L(\vec{u},\vec{v})$. Рассмотрим группу параллельных переносов T_L.
   а) Нарисуйте орбиту какой-нибудь точки при действии группы T_L.
   б) Покажите, что орбиты разных точек получаются одна из другой параллельным переносом (на вектор, не принадлежащий $L(\vec{u},\vec{v})$, если только эти орбиты не совпадают!).
   в) Нарисуйте множество $D_{\vec{u},\vec{v}}$ точек, радиус-векторы которых имеют вид $x\vec{u}+y\vec{v}$, $0\le x<1$, $0\le y<1$. Докажите, что никакие две точки множества $D_{\vec{u},\vec{v}}$ не лежат в одной орбите и что в любой орбите имеется ровно одна точка из $D_{\vec{u},\vec{v}}$.
   г) Покажите, что образы $t_{\vec{w}}(D_{\vec{u},\vec{v}})$ множества $D_{\vec{u},\vec{v}}$ при параллельных переносах на всевозможные векторы решетки $\vec{w}\in L(\vec{u},\vec{v})$ покрывают всю плоскость без пропусков и наложений.
   д) Докажите, что существует такой положительное число r, что круги радиуса r с центрами во всех точках одной орбиты не перекрываются.
   е) Докажите, что в любой решетке имеется лишь конечное число векторов, длина которых не превосходит данное число.

5) Рассмотрим два вектора $\vec{u}',\vec{v}'\in L(\vec{u},\vec{v}) = L(\vec{u}',\vec{v}')$, $\vec{u}' = a\vec{u}+b\vec{v}$, $\vec{v}' = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, $a,b,\alpha\beta\in\mathbb{Z}$. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:
   а) $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ — базис решетки $L(\vec{u},\vec{v})$, т.е. $L(\vec{u},\vec{v}) = L(\vec{u}',\vec{v}')$).
   б) В параллелограмме $D_{\vec{u}',\vec{v}'}$ нет двух точек из одной орбиты.
   в) $a\beta - b\alpha = \pm1$.

6) Докажите теорему Пика: площадь многоугольника с целыми вершинами равна $A/2+B-1$, где B — это число целых точек внутри многоугольника, а A — число целых точек на его границе (считая, конечно, и вершины).

7) *Модулярной фигурой* на плоскости с координатами XOY называется множество точек $(x;y)$ координаты которых удовлетворяют неравенствам $-1/2<x\le1/2$, $x^2+y^2\ge1$, $y>0$. Нарисуйте модулярную фигуру.

8) Дана полная решетка L, $\vec{u}$ — один из ее векторов минимальной ненулевой длины (почему такой вектор существует?). Выберем систему координат таким образом, чтобы вектор $\vec{u}$ имел единичную длину и был направлен в положительном направлении оси OX.
   а) Докажите, что для любого вектора $\vec{v}$ решетки L, не пропорционального вектору $\vec{u}$, найдется такое целое число n, что конец одного из векторов $\vec{v}+n\vec{u}$, $-\vec{v}+n\vec{u}$, отложенного от

начала координат, принадлежит модулярной фигуре.
б) Докажите, что среди векторов минимальной длины в множестве $L \setminus L(\vec{u})$ (почему такой вектор существует? сколько таких векторов может быть?) имеется ровно один такой вектор $\vec{v}$, что конец вектора $\vec{v}$, отложенного от начала координат, принадлежит модулярной фигуре.
в) Докажите, что построенные в векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, являются базисом, т. е. $L = L(\vec{u}, \vec{v})$.

9) В предыдущей задаче доказано, что в любой полной решетке можно выбрать базис $\vec{u}$, $\vec{v}$ следующим стандартным образом: $\vec{u}$ — это кратчайший ненулевой вектор решетки (напомним, что мы договорились выбрать систему координат таким образом, чтобы $\vec{u}$ был единичным вектором оси абсцисс), а $\vec{v}$ — это кратчайший ненулевой вектор решетки, не пропорциональный $\vec{u}$, и притом такой, что его конец (когда он отложен от начала координат) принадлежит модулярной фигуре. Эта точка модулярной фигуры называется *модулем* решетки L. Покажите, что модуль решетки определен однозначно и что две решетки, имеющие разные модули, нельзя превести одна в другую движнием плоскости или гомотетией.

   Предостережение. Это значение слова "модуль" не имеет никакого отношения к абсолютной величине числа; к сожалению, слово "модуль" в математике используется по крайней мере в трех совершенно различных значениях.

10) Нарисуйте разбиение модулярной фигуры Φ на шесть подмножеств:
$\Phi_1 = \{(x; y) \in \Phi\ ,\ x^2 + y^2 > 1, x \neq 0, x \neq 1/2\}$; $\Phi_2 = \{(x; y) \in \Phi\ ,\ y > 1, x = 0\}$;
$\Phi_3 = \{(x; y) \in \Phi\ ,\ y > \sqrt{3}/2, x = 1\}$; $\Phi_4 = \{(x; y) \in \Phi\ ,\ x^2 + y^2 = 1, x \neq 0, x \neq 1/2\}$;
$\Phi_5 = \{(0; 1)\}$; $\Phi_6 = \{(\sqrt{3}/2; 1/2)\}$.
Решетки, модуль которых лежит в Φ_2, называют *прямоугольными*, в Φ_3 и Φ_4 — *ромбическими*, единственная решетка для Φ_5 называется *квадратной*, а для Φ_6 — *гексагональной*. Объясните эти названия. Для каждого значения $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ решите следующую задачу.

    Рассмотрим полную решетку L, модуль которой принадлежит Φ_i. Обозначим для краткости соответствующую ей группу параллельных переносов T_L через Λ (т.е. $\Lambda = T_L$.) Обозначим орбиту какой-нибудь точки A плоскости через $\Lambda \cdot A$. Рассмотрим группу $\Gamma_{L,A}$ всех движений плоскости, переводящих множество $\Lambda \cdot A$ в себя. Опишите все элементы группы $\Gamma_{L,A}$. Докажите, что $\Lambda \subset \Gamma_{L,A}$, причем любой параллельный перенос из $\Gamma_{L,A}$ принадлежит Λ. Докажите, что Λ — нормальная подгруппа в $\Gamma_{L,A}$ и вычислите фактор-группу $\Gamma_{L,A}/\Lambda$.

11) Предыдущую задачу удобно решать, используя следующую конструкцию. Берем любую точку $C \in \Lambda \cdot A$ в орбите точки A. *Многоугольником Вороного* точки C называется геометрическое место таких точек M плоскости, что $|CM| \leq |BM|\ \forall B \in \Lambda \cdot A$. Другими словами, многоугольник Вороного точки C состоит из тех точек плоскости, которые ближе к точке C, чем к любой другой точке множества $\Lambda \cdot A$.
а) Нарисуйте многоугольники Вороного для решетки каждого из шести типов.
б) Докажите, что многоугольники Вороного разных точек орбиты пересекаются только по границе и покрывают всю плоскость. Эта картинка называется *разбиением Вороного*. Докажите, что любые два многоугольника разбиения Вороного переводятся один в другой параллельным переносом из Λ.
в) Докажите, что любое движение плоскости, переводящее множество $\Lambda \cdot A$ в себя, сохраняет также и разбиение Вороного.
г) Докажите, что в каждом смежном классе группы $\Gamma_{L,A}$ по подгруппе Λ имеется ровно одно движение, сохраняющее многоугольник Вороного точки A.
д) Выведите из предыдущей задачи, что фактор-группа $\Gamma_{L,A}/\Lambda$ изоморфна некоторой подгруппе группы всех движений плоскости, сохраняющих многоугольник Вороного некоторой точки. Покажите, что для всех шести типов решеток эта подгруппа на самом деле совпадает со всей группой движений многоугольника Вороного.

12) Опишите группу $\Gamma_{L,A}$ и фактор-группу $\Gamma_{L,A}/\Lambda$ ($\Lambda = T_L$) для неполной решетки L. Что будет в этом случае аналогом многоугольника Вороного и как будет выглядеть разбиение Вороного?