**Геометрия, листок 6.**

В этом листочке евклидова плоскость будет обозначаться $\Pi$.

**Определение.** Отображение $f : \Pi \to \Pi$ называется *движением*, если

1° $f$ взаимно однозначно;

2° $f$ сохраняет расстояния между любыми двумя точками, т.е. $\forall A, B \in \Pi$ длина отрезка $AB$ равна длине отрезка $f(A)f(B)$.

1) Докажите, что следующие отображения плоскости в себя являются движениями. Какие из них сохраняют ориентацию, а какие — нет? Приведите пример взаимно-однозначного отображения плоскости в себя, не являющегося движением.

   а) Зафиксируем вектор $\vec{u}$. *Параллельным переносом на вектор* $\vec{u}$ называется отображение $t_{\vec{u}} : \Pi \to \Pi$, переводящее каждую точку $A \in \Pi$ в такую точку $B = t_{\vec{u}}(A)$, что имеется равенство векторов $\vec{AB} = \vec{u}$.

   б) Зафиксируем точку $O$ и угол $\varphi$. *Поворотом относительно точки $O$ на угол* $\varphi$ называется отображение $r_{O,\varphi} : \Pi \to \Pi$, переводящее каждую точку $A \in \Pi$ в такую точку $B = r_{O,\varphi}(A)$, что длина отрезка $OA$ равна длине отрезка $OB$, $\angle AOB = \varphi$, причем угол отсчитывается от стороны $OA$ к стороне $OB$ в направлении против часовой стрелки.

   в) Зафиксируем прямую $l$. *Зеркальной симметрией относительно прямой* $l$ называется отображение $s_l : \Pi \to \Pi$, переводящее каждую точку $A \in \Pi$ в такую точку $B = s_l(A)$, что прямая $l$ перпендикулярна отрезку $AB$ и пересекает его в его середине.

2) Покажите, что множество всех движений плоскости образует группу относительно операции композиции. Покажите, что эта группа не коммутативна. Будем обозначать эту группу $E(2)$.

3) Пусть $l$ и $m$ — две прямые. Вычислите движение $s_l \circ s_m$. Внимание: ответ зависит от взаимного расположения прямых; разберите случаи а) $l \parallel m$ и б) прямые $l$ и $m$ пересекаются под углом $\alpha$ (угол удобно измерять от прямой $m$ к прямой $l$ против часовой стрелки). При каких условиях $s_l$ и $s_m$ коммутируют?

4) Составьте таблицу умножения для остальных пар движений из задачи 1. Внимание: ответы зависят от взаимного расположения геометрических данных, задающих эти движения; разберите все возможные случаи! При каких условиях соответствующие движения коммутируют? В каких случаях в ответе получается движения, не входящие в список из задачи 1? В этих случаях дайте геометрическое описание новых типов движений. (Подсказка: в некоторых случаях полезно воспользоваться предыдущей задачей и представить каждый сомножитель как композицию подходящих зеркальных симметрий.)

   а) $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$; б) $r_{P,\varphi} \circ r_{P,\psi}$; в) $r_{P,\varphi} \circ r_{Q,\psi}$, $P \neq Q$; г) $r_{P,\varphi} \circ t_{\vec{u}}$ и $t_{\vec{u}} \circ r_{P,\varphi}$; д) $s_l \circ r_{P,\varphi}$ и $r_{P,\varphi} \circ s_l$, $P \in l$;
   е) $s_l \circ t_{\vec{u}}$ и $t_{\vec{u}} \circ s_l$, $\vec{u} \perp l$; ж) $s_l \circ t_{\vec{u}}$ и $t_{\vec{u}} \circ s_l$, $\vec{u} \parallel l$; з) $s_l \circ t_{\vec{u}}$ и $t_{\vec{u}} \circ s_l$, общий случай.

5) **Теорема о трех гвоздях.**

   а) Докажите, что если движение $f$ оставляет на месте две точки $A, B \in \Pi$ (т.е. $A = f(A)$ и $B = f(B)$), то все точки прямой $AB$ являются неподвижными для $f$ (т.е. $\forall C \in AB$ $C = f(C)$). (Это — теорема о двух гвоздях.)

   б) Докажите, что если движение $f$ оставляет на месте три точки $A, B, C \in \Pi$, не лежащие на одной прямой, то $f$ — тождественное отображение (т.е. $\forall M \in \Pi$ и $M = f(M)$).

6) Докажите, что любое движение плоскости переводит прямые в прямые.

7) Перечислите все движения плоскости, оставляющие на месте все точки данной прямой $l$.

8) Перечислите все движения плоскости, имеющие ровно одну неподвижную точку.

9) Докажите, что любое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо зеркальной симметрией, либо *скользящей симметрией. Скользящей симметрией* называется композиция зеркальной симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии. (Подсказка: классифицируйте движения по числу неподвижных точек.)

10) Докажите, что любое движение плоскости можно представить как композицию не более чем трех зеркальных симметрий.

11) Докажите, что все движения плоскости, сохраняющие ориентацию, образуют подгруппу группы $E(2)$. Такие движения часто называют *собственными*; подгруппу собственных движений мы будем обозначать $E^\circ(2)$. Из каких движений состоит $E^\circ(2)$?

12) Сколько имеется в $E(2)$ смежных классов по подгруппе $E^\circ(2)$? Из каких движений они состоят? Докажите, что $E^\circ(2)$ является нормальной подгруппой и вычислите фактор-группу $E^\circ(2)/E^\circ(2)$

13) Пусть $f$ — любое движение плоскости. Докажите, что:
а) $f \circ s_l \circ f^{-1} = s_{f(l)}$; б) $f \circ r_{O,\alpha} \circ f^{-1} = r_{f(O),\pm\alpha}$.
В последней формуле знак плюс соответствует $f \in E^\circ(2)$, минус — $f \notin E^\circ(2)$.

14) а) Докажите, что множество $E_A(2)$ всех движений плоскости, сохраняющих фиксированную точку $A \in \Pi$, является подгруппой в $E(2)$. Из каких движений она состоит? Покажите, что она не нормальна. Выведите из предыдущей задачи, что $f \circ E_A(2) \circ f^{-1} = E_{f(A)}(2)$.
б) Дайте определение группы $E_A^\circ(2)$; докажите, что она нормальна в $E_A(2)$, вычислите фактор-группу $E_A(2)/E_A^\circ(2)$.

15) Докажите, что множество всех параллельных переносов $\mathbb{T}$ образует нормальную подгруппу в $E(2)$.

16) Пусть $f$ — любое движение плоскости, $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ — два равных вектора ( т.е. $\vec{AB} = \vec{CD}$ ). Обозначим $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$. Докажите, что вектора $\vec{A'B'}$ и $\vec{C'D'}$ тогда тоже равны ( т.е. $\vec{A'B'} = \vec{C'D'}$ ).

17) Пользуясь результатом предыдущей задачи, определим *действие группы* $E(2)$ *на множестве всех векторов плоскости*. Пусть даны движение $f \in E(2)$ и вектор $\vec{u}$. Отложим вектор $\vec{u}$ от любой точки $A$, то есть выберем точку $B$ так, чтобы было $\vec{u} = \vec{AB}$. Тогда определим $f(\vec{u})$ как вектор $\vec{A'B'}$, где $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$; результат предыдущей задачи показывает, что $f(\vec{u})$ на самом деле не зависит от выбора точки $A$.
а) Какие движения действуют на множестве векторов плоскости тривиально (т.е. оставляют каждый вектор неизменным)? Докажите, что все такие движения образуют подгруппу в $E(2)$. Найдите эту подгруппу.
б) Докажите, что действие группы $E(2)$ на множестве векторов плоскости хорошо согласовано с операциями над векторами: докажите, что $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$, $f(\vec{0}) = \vec{0}$, $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$ и $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

18) Пусть $f$ — любое движение плоскости. Докажите, что $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1} = t_{\pm f(\vec{u})}$ где знак плюс соответствует $f \in E^\circ(2)$, минус — $f \notin E^\circ(2)$.

19) Пусть $G$ — конечная подгруппа в $E(2)$. Докажите, что все движения из группы $G$ имеют общую неподвижную точку. Выведите отсюда, что если группа $G$ состоит более, чем из двух движений, то $G$ является либо группой вращений правильного $n$-угольника, либо группой его вращений и симметрий (т.е. группой диэдра).

20) Обозначим множество взаимно-однозначных отображений множества векторов плоскости в себя, сохраняющих длины векторов и обладающих всеми своймтвами из задачи 17б, через $O(n)$. Докажите, что $O(n)$ является группой относительно операции композиции.
а) Докажите, что $O(n)$ изоморфна группе $E_A(2)$ (для любой фиксированной точки $A$).
б) Докажите, что $O(n)$ изоморфна фактор-группе $E(2)/\mathbb{T}$.