Геометрия, листок 5.

Задание на вторник, 7 октября.

Тему этого листка обычно стесняются относить к геометрии: это ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОЙ. Для введения системы координат на прямой достаточно отметить начало координат — точку O, зафиксировать единицу измерения и выбрать положительное направление (это называется выбором ориентации на прямой). Получившийся объект в школе называли *числовой прямой*, потому что указанный набор данных задает хорошее взаимно-однозначное соответствие между прямой и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$.

Определение. Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *движением*, если

1° f взаимно однозначно;

2° f сохраняет расстояния между любыми двумя точками, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ |a - b| = |f(a) - f(b)|$.

1) Покажите, что $f_1(x) = x + 3$ и $f_2(x) = 2 - x$ являются движениями, а $f_3(x) = 2x$, $f_4(x) = |x|$ и $f_5(x) = x^2$ — нет. Покажите, что f_1 сохраняет ориентацию, а f_2 меняет ее на противоположную.

2) Покажите, что множество всех движений прямой образует группу относительно операции композиции. Покажите, что эта группа не коммутативна (вычислите $f_1(f_2(x))$ и $f_2(f_1(x))$). Будем обозначать эту группу $E(1)$. (E — в честь Евклида, 1 — размерность прямой.)

3) Перечислите все движения прямой, оставляющие на месте точку $a \in \mathbb{R}$. Задайте каждое из них формулой. Докажите, что все такие движения образуют подгруппу группы $E(1)$. Нетождественное движение, сохраняющее точку $a \in \mathbb{R}$, называется *отражением.*

4) Докажите, что все движения прямой, сохраняющие ориентацию, образуют подгруппу группы $E(1)$. Опишите все такие движения и задайте их формулой. Такие движения часто называют *собственными*; подгруппу собственных движений мы будем обозначать $E^\circ(1)$.

5) Докажите, что $E(1)$ состоит из движений $t_a(x) = x + a$ и $s_b(x) = 2b - x$, $a, b \in \mathbb{R}$ (объясните, зачем здесь двойка!). Какие из этих движений принадлежат $E^\circ(1)$?

6) Составьте таблицу умножения группы $E(1)$: $t_a \circ t_b = ?$, $t_a \circ s_b = ?$, $s_a \circ t_b = ?$, $s_a \circ s_b = ?$, а также вычислите $t_a^{-1} = ?$, $s_b^{-1} = ?$, $s_b t_a s_b^{-1} = ?$ и $t_a s_b t_a^{-1} = ?$.

7) Докажите, что любая нетривиальная конечная подгруппа группы $E(1)$ состоит из двух элементов (каких?).

8) Сколько в группе $E(1)$ имеется смежных классов по подгруппе $E^\circ(1)$? Из каких элементов они состоят?

9) Докажите, что $E^\circ(1)$ является нормально подгруппой $E(1)$ и опишите фактор-группу $E(1)/E^\circ(1)$. Из скольких элементов она состоит?

10) Зафиксируем $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через C_a наименьшую подгруппу $E(1)$, содержащую t_a (т.е. подгруппу, порожденную движением t_a). Из каких движений состоит C_a? Как выглядит орбита точки $0,1 \in \mathbb{R}$ при действием группы C_1 (т.е. $a = 1$)? А орбита точки $0,5 \in \mathbb{R}$?

11) Зафиксируем $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через D_a наименьшую подгруппу $E(1)$, содержащую движения t_a и s_0 (т.е. подгруппу, порожденную движениями t_a и s_0). Из каких движений состоит D_a? Как выглядит орбита точки $0,1 \in \mathbb{R}$ при действием группы D_1 (т.е. $a = 1$)? А орбита точки $0,5 \in \mathbb{R}$?

12) Покажите, что D_1 из предыдущей задачи — это группа всех движений прямой, переводящих множество целых чисел в себя.

13) Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *дискретным*, если если у любой точки прямой есть окрестность, содержащая не более одного элемента множества A. Покажите, что любое конечное множество дискретно. Покажите, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ дискретны, а $\mathbb{Q}$ и $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ — нет.

14) Подгруппа $G \subset E(1)$ называется *дискретной*, если орбита любой точки на прямой при действии G дискретна. Покажите, что подгруппы C_a и D_a из задач 10 и 11 и любая конечная подгруппа $E(1)$ (задача 7) дискретны.

15) Покажите, что подгруппы $\{t_a,\ a \in \mathbb{Q}\} \subset E(1)$ и $\{t_{a+b\sqrt{2}},\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset E(1)$ (почему это подгруппы?) не дискретны.

16) **Классификация дискретных подгрупп движений прямой.** Докажите, что любая дискретная подгруппа $G \subset E(1)$ принадлежит к списку из задачи 14.

17) Покажите, что условие взаимной однозначности в определении движения на самом деле лишнее, т.е. докажите, что любое отображение прямой в себя, сохраняющее расстояния, автоматически взаимно однозначно. Покажите, что если прямую заменить на луч, то это будет уже не так.

18) Построенную в этом листке теорию можно обобщать в двух направлениях. Можно увеличивать размерность, то есть рассматривать плоскость вместо прямой. А можно оставаться на прямой и рассматривать более широкую группу преобразований.

    а) Попробуйте обобщить результаты этого листочка на группу движений плоскости $E(2)$. Основные этапы:

    - усложнится задача 3: имеется большая подгруппа движений с неподвижной точкой, а чтобы получить подгруппу из двух элементов, надо рассматривать движения, сохраняющие целую прямую, — это, конечно, зеркальные отражения;
    - классификация по типу задачи 5 тоже усложнится (будет уже четыре разных типа движений);
    - составление таблицы умножения по типу задачи 6 (различных вариантов будет существенно больше!);
    - кроме нормальной подгруппы $E^\circ(2)$ важную роль играет меньшая нормальная подгруппа, состоящая из всех параллельных переносов (в случае прямой они совпадают);
    - теорию венчает богатая классификация дискретных групп движений плоскости, описывающая все возможные способы рисования на плоскости регулярных узоров. Все эти типы узоров были известны еще в Древнем Египте.

    б) Попробуйте обобщить результаты этого листочка на группу $A(1)$ *аффинных* отображений $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ прямой в себя, задаваемых формулой $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Основные этапы:

    - чуть усложнится задача 3: имеется большая подгруппа аффинных отображений с неподвижной точкой;
    - классификация по типу задачи 5 усложнится лишь слегка;
    - составление таблицы умножения по типу задачи 6 (различных вариантов будет несколько больше!);
    - кроме нормальной подгруппы $A^\circ(1)$ важную роль играет меньшая нормальная подгруппа, состоящая из всех собственных движений;
    - ситуация с дискретными подгруппами практически не усложнится.