Геометрия $4\frac{1}{2}$.

Дополнительный листок 23.09.08.

1) **Структура группы на коническом сечении.** Зафиксируем произвольную точку на коническом сечении, которую будем называть нулем O. Рассмотрим две произвольные (возможно, совпадающие) точки конического сечения P и Q. Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой PQ. Докажите, что прямая l пересекает коническое сечение ровно в двух (возможно, совпадающих) точках O и R. Назовем точку R суммой точек P и Q: $R = P + Q$.

   а) Докажите, что получилась абелева группа, то есть:

      i) $\forall P, Q \quad P + Q = Q + P$;

      ii) $\forall P, Q, R \quad (P + Q) + R = P + (Q + R)$ (это самое трудное утверждение);

      iii) $\forall P \quad P + O = O + P = P$;

      iv) $\forall P\ \exists! Q \quad P + Q = Q + P = O$.

   б) Докажите, что в случае параболы полученная абелева группа изоморфна группе действительных чисел по сложению.

   в) Докажите, что в случае гиперболы полученная абелева группа изоморфна группе ненулевых действительных чисел по умножению.

   г) Заметьте, что в случае окружности получается обычная групповая структура на окружности, определенная сложением центральных углов (или соответствующих дуг).

2) **Геометрическая теорема Безу (предварительный вариант).**

   а) Докажите, что если прямая пересекает кривую n-ого порядка более чем в n различных точках, то она содержится в этой кривой.

   б) Докажите, что если коническое сечение пересекает кривую n-ого порядка более чем в $2n$ различных точках, то оно содержится в этой кривой.

   в) Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если слова "коническое сечение" заменить на "кривая второго порядка"?

   г) Докажите, что если многочлен $F(x, y)$ тождественно равен нулю на прямой l, заданной уравнением первой степени $f_1(x, y) = 0$, то многочлен $F(x, y)$ делится на $f_1(x, y)$, т.е. $F(x, y) = f_1(x, y)g(x, y)$, где $g(x, y)$ — некоторый многочлен степени $n - 1$.

   д) Докажите, что коническое сечение определяет свое уравнение однозначно с точностью до ненулевого множителя.

   е) Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если слова "коническое сечение" заменить на "кривая второго порядка"? Для каких типов кривых второго порядка утверждение предыдущей задачи останется верным?

   ж) Докажите, что если кривая второго порядка проходит через три точки, лежащие на одной прямой, то эта кривая представляет собой пару прямых.

   з) Докажите, что если кривая второго порядка проходит через пять точек, причем никакие три не лежат на одной прямой, то это коническое сечение.

   и) Доказать, что кривая второго порядка не может пересекать коническое сечение более чем в четырех точках.

   к) Верно ли, что если две кривые второго порядка имеют более четырех различных общих точек, то они совпадают?

л) Докажите, что если многочлен $F(x, y)$ третьей степени тождественно равен нулю на коническом сечении, заданном уравнением второй степени $f_2(x, y) = 0$, то многочлен $F(x, y)$ делится на $f_2(x, y)$, т.е. $F(x, y) = f_2(x, y)g(x, y)$, где $g(x, y)$ — некоторая линейная функция.

м) $*$ Докажите, что если многочлен $F(x, y)$ степени $n > 2$ тождественно равен нулю на коническом сечении, заданном уравнением второй степени $f_2(x, y) = 0$, то многочлен $F(x, y)$ делится на $f_2(x, y)$, т.е. $F(x, y) = f_2(x, y)g(x, y)$, где $g(x, y)$ — некоторый многочлен степени $n - 2$.

н) $*$ Придумайте определение "хорошей кривой" степени n таким образом, чтобы были верны следующие две теоремы:

   i) Хорошая кривая степени n определяет свое уравнение однозначно с точностью до ненулевого множителя.

   ii) Если многочлен $F(x, y)$ степени $N > n$ тождественно равен нулю на хорошей кривой степени n, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, то многочлен $F(x, y)$ делится на $f(x, y)$, т.е. $F(x, y) = f(x, y)g(x, y)$, где $g(x, y)$ — некоторый многочлен степени $N - n$.

   Заметьте, что из предыдущих результатов следует, что хорошими кривыми второй степени являются конические сечения и пары различных прямых, а хорошими кривыми третьей степени — по крайней мере тройки различных прямых и объединение конического сечения и прямой.

3) **Пучки кривых.** Пусть $F(x, y)$ и $G(x, y)$ — два непропорциональных многочлена. Множество кривых, задаваемых уравнениями $\lambda F(x; y) + \mu G(x; y) = 0$ при всех ненулевых наборах λ, μ, называется пучком кривых. Заметьте, что, как и в случае пучка прямых, все кривые этого пучка, кроме одной, можно задать неоднородным уравнением $F(x, y) + tG(x, y) = 0$.

   а) Дан пучок кривых. Докажите, что через любую точку плоскости проходит хотя бы одна кривая этого пучка. Заметьте, что любая кривая пучка проходит через точки пересечения кривых $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$.

   б) Может ли быть, что ни одна кривая пучка кривых второго порядка не будет коническим сечением?

   в) Может ли быть, что все кривые пучка кривых второго порядка окажутся коническими сечениями?

   г) Докажите, что если две параболы $y = x^2 + px + q$ и $x = y^2 + p'y + q'$ пересекаются в четырех точках, то их точки пересечения лежат на одной окружности.

   д) На плоскости даны четыре точки, причем никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что существует пучок кривых второго порядка, проходящих через эти четыре точки.

   е) На плоскости даны пять точек, причем никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что существует единственная кривая второго порядка, проходящих через эти пять точек, и что она является коническим сечением.

   ж) Доказать, что пучок в задаче 3д на самом деле единственный: любая кривая второго порядка, проходящая через эти четыре точки, принадлежит этому пучку.

4) **Теорема Паскаля.** Точки пересечения пар противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой.

   а) Подсказка: обозначьте уравнения сторон шестиугольника по порядку через $l_1(x, y), l_2(x, y), \dots l_6(x, y)$ и рассмотрите пучок кривых третьей степени $\lambda l_1(x, y)l_3(x, y)l_5(x, y) + \mu l_2(x, y)l_4(x, y)l_6(x, y)$, проходящих через все вершины шестиугольника. Тогда при подходящих λ и μ кубическая кривая имеет с коническим сечением семь общих точек.

   б) Как сформулировать (и доказать) теорему Паскаля для случая, когда некоторые из пар противоположных сторон шестиугольника параллельны?