Геометрия-4

Задание ко вторнику, 23.09.08.

Письменно надо решить и сдать перед началом семинара задачи 1е, 3, 4, 5а, 5в, 5д.

1) **Конические сечения по Аполлонию.** *Коническим сечением* называется сечение прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса.

   а) Покажите, что сфера, вписанная в конус, касается его по окружности. Докажите, что существует вписанная в конус сфера, касающаяся плоскости конического сечения. Покажите, что если сечение параллельно образующей конуса, то такая сфера единственна, а в остальных случаях таких сфер ровно две. Точка касания такой сферы с плоскостью сечения называется *фокусом* конического сечения. Прямая, по которой плоскость сечения пересекает плоскость, содержащую окружность касания сферы и конуса, называется *директрисой* конического сечения. (Если коническое сечение является окружностью, то директриса не существует.)

   б) Докажите, что любое коническое сечение, отличное от окружности, является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до фокуса и до соответствующей директрисы равно постоянному числу c. Это число c называется *эксцентриситетом* конического сечения. Пользуясь результатом задач 3е и 3ж из 2 листочка докажите, что ограниченное коническое сечение является эллипсом; сечение плоскостью, параллельной образующей конуса, является параболой; в остальных случаях коническое сечение является гиперболой. Покажите, что $c < 1$ для эллипса, $c = 1$ для параболы и $c > 1$ для гиперболы.

   в) Докажите геометрически (т.е. без использования координат и уравнений), что эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до фокусов постоянна.

   г) Докажите геометрически (т.е. без использования координат и уравнений), что каждая ветвь гиперболы является геометрическим местом точек, разность расстояний от которых до фокусов постоянна.

   д) Докажите геометрически (т.е. без использования координат и уравнений), что сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, не параллельной оси цилиндра, является эллипсом.

   е) Уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$ называются *каноническими* уравнениями эллипса, гиперболы и параболы соответственно. Найдите для каждого из них координаты фокусов, уравнения директрис и эксцентриситет.

2) **Фокальное оптическое свойство конических сечений.** Мы считаем, что световой луч отражается от кривой по закону "угол падения равен углу отражения", причем углы измеряются между лучом и касательной к кривой в данной точке.

   а) Даны две точки A и B вне прямой, лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти такую точку M на прямой, чтобы величина $AM + BM$ была минимальна. Докажите, что точка M является решением этой задачи тогда и только тогда, когда прямые AM и BM образуют равные углы с этой прямой. ("Угол падения равен углу отражения".)

   б) Даны две точки A и B вне прямой, лежащие по разные стороны от нее, причем точка A лежит дальше от прямой, чем точка B. Требуется найти такую точку M на прямой, что величина $AM - BM$ была максимальна. Докажите, что точка M является решением этой задачи тогда и только тогда, когда прямые AM и BM образуют равные углы с этой прямой. А что будет, если точки лежат на равном расстоянии от прямой?

   в) Доказать оптическое фокальное свойство эллипса: лучи, исходящие из одного фокуса эллипса после отражения от эллипса соберутся в другом фокусе.

   г) Доказать оптическое фокальное свойство гиперболы: лучи, исходящие из одного фокуса гиперболы после отражения от гиперболы окажутся направлены так, как будто они исходили из ее другого фокуса.

   д) Доказать оптическое фокальное свойство параболы: лучи, исходящие из фокуса параболы после отражения от параболы окажутся параллельны оси симметрии параболы.

3) **Уравнения конических сечений в полярных координатах.** Рассмотрим коническое сечение с эксцентриситетом $\lambda > 0$, имеющее фокус в начале координат, причем соответствующей этому фокусу директрисой является прямая $x = -p$. Докажите, что в полярных координатах эта кривая задается уравнением

$$r = \frac{\lambda p}{1 - \lambda \cos \varphi}.$$

(В случае гиперболы это уравнение задает правую ветвь; найдите уравнение левой.)

4) Для всех действительных значений λ рассмотрим кривые, заданные уравнением

$$r = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda \cos \varphi}.$$

Опишите множество точек плоскости, через которые а) проходит единственная кривая этого семейства; б) проходит несколько кривых (сколько?); в) не проходит ни одна кривая. Опишите множество точек плоскости, через которые проходит а) эллипс б) гипербола в) парабола. Где расположены фокусы каждой кривой; каков ее эксцентриситет? Нарисуйте это семейство. Подумайте, какую линию естественно считать предельной кривой этого семейства при $\lambda = \infty$ и как придать этому утверждению точный математический смысл.

5) **Стереографическая проекция.**

   а) Докажите, любая прямая пересекает кривую второго порядка не более чем в двух точках, либо содержится в ней.

   б) Пусть M — точка на коническом сечении, рассмотрим пучок прямых, проходящих через точку M, заданный неоднородным уравнением с параметром t. (Определения см. листок 2, задача 5б.) Обозначим через $(\xi(t); \eta(t))$ координаты второй точки пересечения прямой l_t с коническим сечением. Докажите, что функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ рациональны и представляют собой параметризацию данной кривой. Докажите, что функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно привести к общему знаменателю так, что их числители и знаменатель будут не более чем квадратичны по t.

   в) Выпишите явно описанную в предыдущей задаче параметризацию окружности $x^2 + y^2 = 1$, используя в качестве M точку $(-1; 0)$, а в качестве параметра t — угловой коэффициент прямой. Выразите t через стандартный параметр на окружности φ ($x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$) и узнайте в полученных выражениях стандартные тригонометрические формулы (какие?).

   г) Докажите, что если коэффициенты уравнения конического сечения и координаты точки M в задача 5б рациональны, то функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ также имеют рациональные коэффициенты. Пользуясь формулами из предыдущей задачи, получите отсюда формулы для перечисления пифагоровых троек (целочисленных решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$).

   д) Перечислите целочисленные треугольники с углом а) $60°$; б) $120°$.

6) **Софокусные семейства.** Даны точки F_1 и F_2.

   а) Докажите, что через любую точку плоскости, за исключением отрезка F_1F_2, проходит единственный эллипс с фокусами F_1 и F_2.

   б) Сформулируйте и докажите, аналогичное утверждение для гиперболы с фокусами F_1F_2. Через какие точки такие гиперболы не проходят?

   в) Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом. Нарисуйте семейство софокусных эллипсов и гипербол на одной картинке.

   г) Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$. Как будет выглядеть "предельная" картинка из предыдущего пункта, если c устремить к нулю? Попробуйте сформулировать точное математическое утверждение и доказать его.