Геометрия-3.

Задание ко вторнику, 16.09.08.

Письменно надо решить и сдать перед началом семинара задачи 1а, 1б и 1в.

1) **Конструкция Штейнера.**

   а) Нарисуйте пучок прямых l_t, заданный уравнением $y = tx$, и пучок прямых m_t, заданный уравнением $x + ty = 2t$. Найдите и нарисуйте геометрическое место точек пересечения прямых l_t и m_t (при одном и том же t).

   б) Нарисуйте пучок прямых l_t, заданный уравнением $y = tx$, и пучок прямых m_t, заданный уравнением $y = (t-1)x + t$. Найдите и нарисуйте геометрическое место точек пересечения прямых l_t и m_t (при одном и том же t).

   в) Нарисуйте пучок прямых l_t, заданный уравнением $y = t(x+1)$, и пучок прямых m_t, заданный уравнением $(t+1)x - (t+1)y = t - 1$. Найдите и нарисуйте геометрическое место точек пересечения прямых l_t и m_t (при одном и том же t).

   г) Сформулируйте и докажите теорему о геометрическом месте точек пересечения прямых двух пучков.

   д) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

2) **Кривые второго порядка.** Пусть $F(x, y)$ — многочлен степени n от переменных x и y. *Кривой n-ого порядка* называется множество точек $(x; y)$ плоскости, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$. В частности, *кривой второго порядка* называется множество точек $(x; y)$ аффинной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Px + 2Qy + R = 0. \tag{0.1}$$

(При этом предполагается, что хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля; двойки в некоторых коэффициентах поставлены просто для удобства.) Заметьте, что коэффициенты уравнения кривой определены с точностью до ненулевого сомножителя: при одновременном умножении их на ненулевое число кривая не меняется. Будем называть кривую второго порядка *нетривиальной*, если она содержит более одной точки. (Примеры тривиальных кривых: $x^2 + y^2 = 0$; $x^2 + y^2 = -1$.)

Пусть l_1 и l_2 — прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Кривая второго порядка, заданная уравнение $(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, называется *распавшейся*; она представляет собой объединение прямых l_1 и l_2. (Возможен случай, когда прямые l_1 и l_2 совпадают; в таком случае говорят, что кривая представляет собой *двойную прямую*.)

Кривая второго порядка, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{0.2}$$

называется *эллипсом*.

Кривая второго порядка, заданная уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{0.3}$$

называется *гиперболой*.

а) Докажите, что понятие кривой второго порядка не зависит от выбора системы координат.

б) Докажите, что при параллельном переносе начала координат коэффициенты при мономах второй степени не меняются (с точностью до постоянного множителя).

в) Дана кривая второго порядка. Докажите, что на плоскости всегда можно выбрать такую систему координат, в которой в уравнении этой кривой коэффициент C будет равен нулю. (Достаточно повернуть систему координат на подходящий угол.)

г) Дана нетривиальная не распавшаяся кривая второго порядка, в уравнении которой коэффициент C равен нулю. Докажите, что если один из коэффициентов A или B тоже равен нулю, то это парабола.

д) Дана нетривиальная не распавшаяся кривая второго порядка, в уравнении которой коэффициент C равен нулю, а оба коэффициента A и B ненулевые. Докажите, что либо гипербола, либо эллипс.

3) **Пучки прямых и их уравнения.** Пучок прямых, проходящих через данную точку, задан уравнением

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0. \tag{0.4}$$

($a(t),\ b(t),\ c(t)$ — линейные функции от параметра t).

а) Пусть l_0 — прямая пучка, соответствующая значению $t = 0$, а l_∞ — прямая пучка, соответствующая значению $t = \infty$. Можно ли задать этот же пучок прямых другим уравнением $a'(t)x+b'(t)y+c'(t) = 0$ так, чтобы значениям $t = 0$ и $t = \infty$ соответствовали бы те же самые прямые l_0 и l_∞? Перечислите все такие уравнения.

б) Пусть l_0 — прямая пучка, соответствующая значению $t = 0$, а l_∞ — прямая пучка, соответствующая значению $t = \infty$, а l_1 — прямая пучка, соответствующая значению $t = 1$. Докажите, что если $a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0$ — другое уравнение этого же пучка, причем значениям $t = 0$, $t = 1$ и $t = \infty$ соответствуют те же самые прямые l_0, l_1 и l_∞, то коэффициенты $a(t),\ b(t),\ c(t)$ и $a'(t),\ b'(t),\ c'(t)$ пропорциональны (т. е. $\frac{a(t)}{a'(t)} = \frac{b(t)}{b'(t)} = \frac{c(t)}{c'(t)}$).

в) Рассмотрим замену

$$t = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}. \tag{0.5}$$

(Предполагается, конечно, что эта дробь не постоянна и что знаменатель не равен тождественно нулю.) Докажите, что уравнение $a(\frac{\alpha s+\beta}{\gamma s+\delta})x + b(\frac{\alpha s+\beta}{\gamma s+\delta})y + c(\frac{\alpha s+\beta}{\gamma s+\delta}) = 0$ после приведения подобных членов и сокращения на общий знаменатель будет уравнением того же пучка прямых.

г) Докажите, что любое уравнение того же самого пучка прямых $a'(s)x + b's(t)y + c'(s) = 0$ получается из уравнения (0.4) заменой (0.5).