Геометрия-2.

Задание ко вторнику, 9.09.08.

Письменно надо решить и сдать перед началом семинара задачи 2б (три кривые на выбор), 3 (три ГМТ на выбор) и 6.

1) а) Вектор $\vec{u} = (2;1)$ направлен по биссектрисе угла, образованного вектором $\vec{v} = (3;4)$ и положительным направлением оси OX (Докажите!). Приведите другие примеры целочисленных векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, обладающих таким свойством. (Эти примеры не должны получаться из данного при помощи отражений, поворотов и растяжений!)

   б) Существуют ли два целочисленных вектора, не имеющих нулевых координат, угол между которыми был бы 45°? Если да, то попробуйте описать все такие ситуации.

   в) Тот же вопрос для 30° и 60°.

2) **Уравнения "в отрезках".**

   а) *(Уравнение прямой "в отрезках".)* Напишите уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке с координатой a и ось ординат в точке с координатой b. (a и b отличны от нуля.)

   б) *(Нелинейные уравнения "в отрезках".)* Для $n = 2, 3, -1, -2$ нарисуйте кривые $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 1$. Для четных n нарисуйте также кривые $\frac{x^n}{a^n} - \frac{y^n}{b^n} = 1$.

3) **Геометрические места точек.**

   а) Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух заданных точек постоянна. (Удобно расположить точки на оси $0X$ симметрично относительно начала координат.)

   б) Та же задача, но когда постоянна разность квадратов расстояний.

   в) Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух заданных точек постоянно.

   г) Напишите уравнение геометрического места точек, сумма расстояний от которых от двух заданных точек постоянна. Нарисуйте это ГМТ. (Удобно расположить точки на оси $0X$ симметрично относительно начала координат.)

   д) Та же задача, но когда постоянна разность расстояний.

   е) Напишите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от заданной точки и от заданной прямой. Нарисуйте это ГМТ. (Удобно расположить точку на оси $0Y$, а прямую взять параллельной оси $0X$ таким образом, чтобы начало координат входило в искомое ГМТ.)

   ж) Напишите уравнение геометрического места точек, отношение расстояний от которых до точки $(c;0)$ и до прямой $x = d$ равно $\sqrt{c/d}$ $(c, d > 0)$. Нарисуйте это ГМТ для $c > d$ и $c < d$.

з) Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки окружности на ее касательные.

и) Напишите уравнение геометрического места точек, произведение расстояний от которых до точек $(1,0)$ и $(-1,0)$ равно константе c.

   i) При каких значениях параметра c это ГМТ связно?

   ii) При каких значениях параметра c это ГМТ образует выпуклую кривую? (Выпуклая кривая это такая кривая, что всякая прямая пересекает ее не более чем в двух точках.)

   iii) Каково максимальное количество точек пересечения этой кривой и прямой при различных значениях c?

4) **Инверсия.** Инверсией называется отображение F плоскости без начала координат в себя, задаваемое в полярных координатах формулами $F(r;\varphi) = (\frac{1}{r};\varphi)$.

   а) Докажите, что при инверсии прямые и окружности переходят в прямые или в окружности, в зависимости от того, проходила исходная линия через начало координат, или нет.

   б) Докажите, что инверсия переводит кардиоиду в параболу.

   в) Докажите, что инверсия переводит лемнискату Бернулли в гиперболу.

5) **Пучки прямых.**

   а) Множество прямых, проходящих через данную точку $(x_0;y_0)$ называется *пучком прямых.* Множество прямых, параллельных данной прямой, тоже называется *пучком прямых.* Рассмотрим три вида уравнений прямых: $ax+by=1$, $y=kx+b$ и $x=ly+a$. Докажите, что любая прямая на каждой из плоскостей $(a;b)$, $(k;b)$ и $(l;a)$ определяет пучок прямых. Какие пучки прямых не представляются таким образом на каждой из плоскостей? Какие прямые на каждой из плоскостей $(a;b)$, $(k;b)$ и $(l;a)$ представляют все прямые соответствующего пучка, а какие — все, кроме одной?

   б) Пусть $f(x,y)=0$ и $g(x,y)=0$ уравнения двух разных прямых данного пучка прямых. Доказать, что любая прямая данного пучка задается уравнением $\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)=0$, причем числа λ и μ определяются по данной прямой однозначно с точностью до ненулевого сомножителя. Доказать, что любая прямая данного пучка, кроме одной (какой), задается уравнением $tf(x,y)+g(x,y)=0$, причем число t определяется по данной прямой однозначно. Заметьте, что в каждом случае пучок задается уравнением прямой одного из видов, коэффициенты которого являются линейными функциями от параметров λ,μ или параметра t, причем в первом случае коэффициенты еще и однородны по λ,μ. Покажите, что любое уравнение прямой, коэффициенты которого являются непостоянными однородными линейными функциями от параметров λ,μ, или непостоянными линейными функциями от параметра t, задает вышеописанным образом пучок прямых. (Конечно, формально надо еще исключить банальный случай однородного уравнения $ax+by=c$, все коэффициенты которого делятся на одну и ту же линейную функцию, так что постоянные коэффициенты получатся только после сокращения на эту функцию.) Такие уравнения мы будем называть *однородным* (в случае параметров λ,μ) или *неоднородным* (в случае параметра t) уравнением пучка прямых. Заметьте, что неоднородное уравнение пучка прямых представляет собой параметрическое задание прямой на одной из плоскостей $(a;b)$, $(k;b)$ и $(l;a)$.

в) Пусть уравнение $a(t)x + b(t)y = c(t)$ (или $y = k(t)x + b(t)$) описывает все прямые пучка, кроме одной. (Здесь $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $k(t)$ — линейные функции от t.) Придумайте, как можно придать смысл утверждению "недостающая прямая пучка соответствует значению $t = \infty$".

г) Даны уравнения двух прямых, проходящих через точку $(x_0; y_0)$. Написать уравнение прямой, симметричной второй прямой относительно первой.

д) Дано уравнение прямой l, проходящей через точку $(x_0; y_0)$. Как написать уравнение пучка проходящих через точку $(x_0; y_0)$ прямых таким образом, чтобы значению $t = 0$ соответствовала прямая l, а значению $t = \infty$ — перпендикулярная ей прямая? Как при этом будут связаны значения t, соответствующие двум прямым этого пучка, симметричным друг другу относительно прямой l?

е) Даны уравнения двух параллельных прямых. Написать уравнение прямой, симметричной второй прямой относительно первой. Как написать уравнение этого пучка параллельных прямых таким образом, чтобы значению $t = 0$ соответствовала первая прямая? Как при этом будут связаны значения t, соответствующие двум прямым этого пучка, симметричным друг другу относительно первой прямой?

ж) Даны уравнения двух прямых, проходящих через точку $(x_0; y_0)$. Написать уравнения двух биссектрис углов, образованных этими прямыми.

6) Световой луч попадает внутрь угла, образованного осью абсцисс и прямой $y = x$, двигаясь вдоль прямой $2x - 3y - 4 = 0$ (вниз). В дальнейшем он путешествует внутри угла, отражаясь от его сторон по закону "угол падения равен углу отражения", пока не покидает угол окончательно. Найдите координаты всех точек отражения и уравнение отраженного луча.

7) **Нелинейные семейства прямых.**

а) Угадайте, каково геометрическое происхождение следующих нелинейных семейств прямых (это уже не пучки, поскольку зависимость от t не линейная!):

i) $(\cos t)x + (\sin t)y = 1$;

ii) $y = 2tx - t^2$;

iii) $y = -t^2 x + 2t$;

iv) $(1 - t^2)x + 2ty = 1 + t^2$.

б) $*$ Попробуйте, основываясь на результатах предыдущей задачи, сформулировать и доказать теорему о семействе прямых $a(t)x + b(t)y = c(t)$, где $a(t), b(t), c(t)$ — квадратные трехчлены.