Геометрия-1.

Задание ко вторнику, 02.09.08.

Решения задач 1д, 1ж, 2з, 3а, 3б, 3в, 4е (один пункт на Ваш выбор), 4ж (один пункт на Ваш выбор, кроме первого) надо записать и сдать работу во вторник перед началом семинара. Остальные задачи надо быть готовыми сдать (т.е. рассказать с обоснованием) устно.

1) **Повторим векторы.**

а) Дан вектор $\vec{v} = (a; b)$. Как записать а) любой вектор, параллельный $\vec{v}$? б) любой вектор, перпендикулярный $\vec{v}$? в) вектор единичной длины, параллельный вектору $\vec{v}$ и направленный в ту же сторону?

б) Даны векторы $\vec{u} = (\alpha; \beta)$ и $\vec{v} = (a; b)$. Как записать векторы $\vec{np}_{\vec{u}}\vec{v}$ и $\vec{v}_{\perp}$, где вектор $\vec{np}_{\vec{u}}\vec{v}$ параллелен вектору $\vec{u}$, $\vec{v}_{\perp}$ перпендикулярен вектору $\vec{u}$, и $\vec{v} = \vec{np}_{\vec{u}}\vec{v} + \vec{v}_{\perp}$? (Вектор $\vec{np}_{\vec{u}}\vec{v}$ называется проекцией вектора $\vec{v}$ на $\vec{u}$, а $\vec{v}_{\perp}$ — ортогональной составляющей вектора $\vec{v}$.) Как записать вектор, симметричный вектору $\vec{v}$ относительно $\vec{u}$?

в) **Повторим пропорции.** *Пропорцией называется* формальное выражение вида

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

где дробная черта *не является* знаком деления. *Пропорция называется верной,* если $ad = bc$. Таким образом, $\frac{3}{0} = \frac{5}{0}$ и $\frac{3}{5} = \frac{0}{0}$ — верные пропорции. Докажите, что два вектора $\vec{u} = (a; b)$ и $\vec{u} = (c; d)$ пропорциональны тогда и только тогда, когда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — верная пропорция. Аналогично определяется пропорция

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

и формулируется условие пропорциональности n векторов.

г) Вычислите площадь параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются радиус-векторы точек $(a; b)$ и $(c; d)$.

д) $ABCDE$ — пятиугольник. M, K, P, T — середины отрезков BC, CD, DE и EB. A_1 - точка пересечения MP и KT. Точки B_1, C_1, D_1 и E_1 строятся аналогично. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $ABCDE$ подобны.

е) Из медиан треугольника построили второй треугольник (почему это возможно?), а из медиан второго — третий. Докажите, что первый и третий треугольники подобны, и найдите коэффициент.

ж) Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, а H — точка пересечения его высот. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2) **Повторим уравнение прямой.**

а) Любая прямая на плоскости задается уравнением $ax + by = c$. Какие ненулевые наборы $(a; b; c)$ определяют одну и ту же прямую? Какие ненулевые наборы $(a; b; c)$ не определяют никакую прямую?

б) Уравнение $ax+by=1$ однозначно определяет прямую на плоскости. Какие пары чисел $(a;b)$ не определяют никакую прямую? Какие прямые не задаются таким уравнением?

в) Уравнение $y=kx+b$ однозначно определяет прямую на плоскости. Какие прямые не задаются таким уравнением? Те же вопросы для уравнения $x=ly+a$.

г) Как написать уравнение произвольной прямой, а) параллельной данной? б) перпендикулярной данной? Ответьте на этот вопрос для всех возможных способов задания уравнения прямой.

д) Как написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ параллельно ненулевому вектору $(\alpha;\beta)$? Выпишите уравнения обоих видов.

е) Заметьте, что уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ параллельно ненулевому вектору $(\alpha;\beta)$, можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}.$$

Такое уравнение называется *каноническим уравнением прямой*. Покажите, что любая точка этой прямой при подходящем значении t имеет координаты

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \end{cases}$$

Эти уравнения называются *параметрическими уравнениями прямой*.

ж) Как написать уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$? Выпишите уравнения всех возможных видов.

з) Выведите формулу для вычисления расстояния от точки $(x_0;y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax+by=c$.

3) **Повторим уравнение касательной.** Напишите уравнение прямой, касающейся

а) параболы $y=x^2$ в точке $(x_0;x_0^2)$;

б) гиперболы $y=\frac{1}{x}$ в точке $(x_0;\frac{1}{x_0})$;

в) окружности $x^2+y^2=R^2$ в точке $(R\cos\varphi;R\sin\varphi)$.

4) **Повторим системы координат.**

а) Выпишите формулы перехода от декартовых координат к полярным и обратно.

б) Выпишите формулы перехода к декартовой системе координат, полученной параллельным переносом начала координат в точку $(x_0;y_0)$.

в) Выпишите формулы перехода к декартовой системе координат, полученной поворотом на угол φ против часовой стрелки и формулы обратного перехода.

г) Как преобразуются различные виды уравнения прямой при параллельном переносе и повороте?

д) Напишите уравнение гиперболы $xy=c$ $(c\neq 0)$ в новой системе координат, осями которой являются биссектрисы координатных углов (т.е. прямые $y=x$ и $y=-x$).

е) Нарисуйте кривые, заданные следующими уравнениями, перейдя в систему координат, повернутую на подходящий угол.

i) $x^2+y^2=x+y+2xy$;

ii) $x^2 + y^2 = xy$;

iii) $x^2 - 2\sqrt{3}xy - 2y^2 = 2$.

ж) Нарисуйте кривые, заданные уравнениями в полярных координатах:

i) $r = 1$;

ii) $r = 2\cos\varphi$;

iii) $r = \cos\varphi + \sin\varphi$;

iv) $r = \frac{1}{\cos\varphi}$;

v) $r = \frac{1}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$;

vi) $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$;

vii) $r = \varphi$ (спираль Архимеда).

viii) $r = 1 + \cos\varphi$ (кардиоида);

ix) $r^2 = \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли);

x) $r = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^3\varphi}$ (декартов лист).