

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ЭКЗАМЕН ЗА 2 МОДУЛЬ,
ВАРИАНТ 2

Вы можете пользоваться *своими* рукописными записями, но не печатными материалами.

Не забудьте подписать работу. Условия задач сдайте, пожалуйста, вместе с работой

1. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^x - e}.$$

2. Найдите производную функции

$$f(x) = (\cos x)^{1/\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Найдите производную функции

$$f(x) = \frac{x^6}{1+x^{12}} + \operatorname{arctg}(x^6).$$

Ответ упростите.

4. Докажите, что $\operatorname{tg} x > 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ при $\pi/4 < x < \pi/2$.

5. Постройте график функции

$$y = \frac{x^2 - 6x + 11}{x^2 - 7x + 10}.$$

На графике должны быть указаны уравнения асимптот, точки пересечения с осями и экстремумы (если есть). Координаты точек перегиба искать не надо.

6. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}?$$

7. Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, причем $\underline{\lim} a_n = 2$ и $\overline{\lim} a_n = 5$. Предположим, что $\{b_n\}$ — последовательность действительных чисел, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$. Найдите $\underline{\lim}(a_n b_n)$ и $\overline{\lim}(a_n b_n)$ (не забудьте обосновать ответ!).

8. Пусть $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Положим

$$g(x) = \min_{t \in [x; b]} f(t)$$

(в частности, $g(b) = f(b)$). Докажите, что $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция.