9. Некоторые следствия из свойств полноты

Начнем с понятия, которое нам уже знакомо (как минимум в примерах). Речь идет о понятии подпоследовтаельности.

Именно, пусть у нас есть последовательность $\{x_n\}$; неформально говоря, подпослпедовательность получится, если выбросить из нее часть членов (с тем, чтобы их осталось бесконечно много и чтобы оставшиеся члены последовательности шли в том же порядке, что и раньше. Формализуется это понятие следующим образом.

Определение 9.1. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, и пусть $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — строго возрастающая последовательность. Тогда последовательность вида $\{y_n\}$, где $y_n = x_{\varphi(n)}$, называется подпоследовательностью исходной последовательности.

В задачах нам встречались, например, случаи $\varphi(n) = 2n$ и $\varphi(n) = n^2$. Вот простое, но важное свойство подпоследовательностей.

Предложение 9.2. *Если последовательность (действительных или комплексных чисел) $\{a_n\}$ сходится к числу a, то и всякая ее подпоследовательность сходится к a.*

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность $\{b_n = a_{\varphi(n)}$. Так как $\lim a_n = a$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < \varepsilon$, как только $n > N$. Заметим теперь, что из строгого возрастания функции φ вытекает, что $\varphi(n) \geqslant n$ для всех n (так как $\varphi(1) \geqslant 1$ и $\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k) + 1$). Поэтому (при тех же ε и N) получаем, что из $n > N$ вытекает, что $\varphi(n) \geqslant n > N$, так что $|y_n - a| = |x_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Этим доказано, что $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. □

Определение 9.3. Точка a называется *предельной точкой* последовательности a_n, если у этой последовательности есть подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к a.

Предложение 9.4. *Следующие два условия равносильны.*

(1) Точка a является предельной точкой последовательности a_n.

(2) Для всякого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много номеров $n \in \mathbb{N}$, для которых $|a_n - a| < \varepsilon$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $K > 0$, что при $k > K$ имеем $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Остается заметить, что номеров n_k, где $k > K$, бесконечно много.

(2) $\Rightarrow$ (1). Зафиксируем какую-нибудь последовательность положительных чисел ε_n, стремящуюся к нулю (например, $\varepsilon_n = 1/n$). По условию, существует такое $k_1 \in \mathbb{N}$, что $|a_{k_1} - a| < \varepsilon_1$. Далее, существует бесконечно много таких m, что $|a_m - a| < \varepsilon_2$; так как таких номеров бесконечно много, они не могут все быть $\leqslant k_1$, так что существует такой $k_2 > k_1$, что $|a_{k_2} - a| < \varepsilon_2$; пользуясь аналогичным образом бесконечностью множества

$$\{m \in \mathbb{N} \mid |a_m - a| < \varepsilon_3,$$

найдем такое $k_3 > k_2$, что $|a_{k_3} - a| < \varepsilon_3$, и т. д. В итоге будет построена строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_j\}$, для которой $|a_{k_j} - a| < \varepsilon_j$; поскольку $\varepsilon_j \to 0$, имеем $\lim_{j\to\infty} a_{k_j} = a$, так что мы нашли подпоследовательность, сходящуюся к a. $\square$

До сих пор нам было все равно, являются члены наших последовательностей действительными или произвольными комплексными числами. В следующей ниже важной теореме, однако, они будут действительными, так как в ней существенно используются порядковые свойства действительных чисел.

Определение 9.5. *Верхним пределом* последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ называется ее наибольшая предельная точка, если таковая существует.

Нижним пределом последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ называется ее наименьшая предельная точка, если таковая существует.

Верхний предел последовательности $\{x_n\}$ обозначается $\overline{\lim}\, x_n$, а нижний предел этой последовательности обозначается $\underline{\lim}\, x_n$.

Теорема 9.6. *Если последовательность действительных чисел ограничена, то у нее существуют верхний и нижний пределы.*

Доказательство. Докажем существование верхнего предела у ограниченной последовательности $\{x_n\}$ (существование нижнего предела доказывается аналогично или переходом к последовательности $\{-x_n\}$).

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$y_k = \sup_{m \geqslant k} x_m;$$

поскольку последовательность $\{x_m\}$ ограничена сверху, такая верхняя грань существует для всякого k. Далее, имеем, очевидно, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots$ —

последовательность $\{y_k\}$ монотонно убывает. Поскольку последовательность $\{x_m\}$ ограничена снизу (скажем, $x_n \geqslant C$ при всех n), имеем $y_k \geqslant x_k \geqslant C$ при всех k, так что последовательность $\{y_k\}$ ограничена снизу. Стало быть, существует предел $y = \lim_{k\to\infty} y_k$. Покажем, что y является верхним пределом последовательности $\{x_n\}$. Для этого надо проверить два утверждения: (1) y — предельная точка последовательности $\{x_n\}$; (2) если $y' > y$, то y' предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ не является.

(1) От противного, предположим, что y не является предельной точкой. Тогда ввиду предложения 9.4 существуют такие $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ что при всех $n \geqslant N$ имеем либо $|x_n \geqslant y + \varepsilon$, либо $|x_n \leqslant y - \varepsilon$. Стало быть, при $n \geqslant N$ имеем либо $y_n \geqslant y + \varepsilon$ (если существует такое $n' \geqslant n$, что $|x_{n'} \geqslant y + \varepsilon$), либо $y_n \leqslant y - \varepsilon$ (если $|x_{n'} \leqslant y - \varepsilon$ при всех $n' \geqslant n$). В любом случае выходит, что $|y_n - y| \geqslant \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$; это противоречит тому, что $\lim y_k = y$.

(2) Пусть $y' > y$; выберем число c, для которого $y < c < y'$. Так как $\lim y_n = y$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $y_n < c$; следовательно, и подавно $x_k < c$ при $k \geqslant n$.Если теперь положить, скажем, $\varepsilon = y' - c > 0$, то при всех $k \geqslant n$ имеем $|x_k - y'| > \varepsilon$; ввиду предложения 9.4 отсюда следует, что y' не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 9.7. *Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то*

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{m\geqslant k} x_m,$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{m\geqslant k} x_m, .$$

Эти равенства были установлены нами в процессе доказательства теоремы.

Следствие 9.8. *Если $c > \overline{\lim}\, x_n$, то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $x_n \leqslant c$.*

Это также содержится в доказательстве теоремы (а конкретнее, утверждения (2)).

Следствие 9.9 (лемма Гейне—Бореля)**.** *Всякая ограниченная последовательность действительных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.*

Следствие 9.9 будет играть важную роль в дальнейшем.

С помощью верхнего и нижнего предела можно следующим образом охарактеризовать сходящиеся последовательности.

Предложение 9.10. *Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность действительный чисел. Тогда она имеет предел в том и только в том случае, когда $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, причем в этом случае общее значение верхнего и нижнего пределов последовательности совпадает с ее пределом.*

Доказательство. Пусть $\lim x_n = a$. Тогда (по предложению 9.2) всякая подпоследовательность в $\{x_n\}$ также сходится к a; стало быть, a — единственная предельная точка нашей последовательности, она же наименьшая и наибольшая, так что $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$.

Обратно, пусть $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$. Положим

$$y_k = \sup_{m \geqslant k} x_m, \qquad z_k = \sup_{m \geqslant k} x_m.$$

Очевидно, $z_k \leqslant x_k \leqslant y_k$ при всех k, и с другой стороны $\lim y_k = \lim z_k = a$ по следствию 9.7. Стало быть, $\lim x_n = a$ по теореме о двух милиционерах. $\square$

Изложенную выше теорию можно слегка обобщить на случай не обязательно ограниченных последовательностей. Именно, рассмотрим множество $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, полученное формальным присоединение к $\mathbb{R}$ символов $+\infty$ и $-\infty$. Будем считать, что $-\infty < x < \infty$ для всякого $x \in \mathbb{R}$ (никаких арифметических операций с символами $\pm\infty$ не производится). Тогда в множестве $\bar{\mathbb{R}}$ символ $+\infty$ является верхней границей всякого множества действительных чисел; если это множество неограничено сверху, то $+\infty$ является тем самым и его верхней гранью. Аналогично, $-\infty$ является нижней гранью всякого неограниченного снизу множества. Далее, будем говорить, что $+\infty$ является предельной точкой последовательности действительных чисел, если у нее есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim x_{n_k} = +\infty$; это условие, как легко видеть, равносильно тому, что $\{x_n\}$ неограничена сверху. Аналогично, $-\infty$ является предельной точкой последовательности тогда и только тогда, когда она неограничена снизу. Если принять этот формализм, то окажется, что у *любой* монотонной последовательности действительных чисел есть предел в $\bar{\mathbb{R}}$ (хотя бы в виде $+\infty$ или $-\infty$) и что у *любой* последовательности действительных чисел есть верхний и нижний пределы в $\bar{\mathbb{R}}$ (опять-таки хотя бы в виде $+\infty$ или $-\infty$). Предлагаем читателю продумать подробности самостоятельно — это полезное упражнение.

Мы применим понятие верхнего предела к задаче о сходимости степенных рядов. Именно, рассмотрим ряд вида

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{9.1}$$

где a_j — произвольные комплексные числа (если кому-то психологически легче считать числа a_n и z действительными, он может так и делать; упрощений это не принесет). Такие ряды называются *степенными рядами*; они играют в математике очень важную роль. В частности, важен вопрос о том, при каких $z \in \mathbb{C}$ ряд (9.1) сходится. На этот вопрос можно получить почти исчерпывающий ответ.

Предложение 9.11 (формула Коши—Адамара). *Положим, для ряда* (9.1), $R = 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ *(допуская вольность речи, полагаем, что* $1/0 = +\infty$ *и* $1/(+\infty) = 0$*). Тогда ряд* (9.1) *сходится при* $|z| < R$ *и расходится при* $|z| > R$ *(если* $R = +\infty$*, это означает, что ряд сходится при всех* z*, если* $R = 0$*, это означает, что ряд сходится только при* $z = 0$*).*

Число R из предложения 9.11 называется *радиусом сходимости* ряда (9.1). Заметим, что предложение ничего не говорит про сходимость ряда при $|z| = R$ («на границе круга сходимости»): в этом случае ничего определенного a priori сказать нельзя.

Доказательство. Разберем сначала случай, когда $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = a$ отличен от 0 и $+\infty$. Пусть $|z| < R$; тогда $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|z|$. Выберем какое-нибудь число c, для которого $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < c < 1/|z|$. По следствию 9.8 то существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant c$, то есть $|a_n| \leqslant c^n$. Следовательно, при $n \geqslant N$ имеем $|a_n z^n| \leqslant |cz|^n$. Так как $c < 1/|z|$, имеем $|cz| < 1$, так что ряд $\sum |cz|^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Поскольку при всех $n \geqslant N$ модуль n-го члена ряда (9.1) не превосходит n-й член сходящейся прогрессии, по признаку сравнения сходится ряд $\sum |a_n z^n|$, а значит (по признаку абсолютной сходимости) и ряд (9.1).

Пусть теперь, напротив, $|z| > R$, то есть $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1/R > 1/|z|$. По определению верхнего предела существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, для которой $\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1/R$; стало быть, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что при $k \geqslant K$ имеем $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant 1/|z|$, или, что равносильно, $|a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1$. Итак, в ряде (9.1) имеется бесконечно много членов, модуль которых $\geqslant 1$; значит, общий член этого ряда не стремится к нулю и ряд расходится.

Если $R = +\infty$, то $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, откуда и из следствия 9.8 легко видеть, что существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant N$ имеем $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant$

$1/(2|z|)$, откуда $|a_n z^n| \leqslant 1/2^n$; стало быть, ряд (9.1) сходится ввиду признака сравнения и признака абсолютной сходимости.

Если, наконец, $\mathbb{R} = 0$, то есть $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то существует такая строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}$, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geqslant 1/|z|$, то есть $|a_{n_k} z^{n_k}| \geqslant 1$. Остается только дословно повторить одно из предыдущих рассуждений: итак, в ряде (9.1) имеется бесконечно много членов, модуль которых $\geqslant 1$ — и так далее. $\square$