# 7–8. Построение действительных чисел (продолжение)

Теперь мы в состоянии определить деление действительных чисел. Для этого достаточно определить обратное к ненулевому числу. Всякое ненулевое действительное число задается фундаментальной последовательностью, не стремящейся к нулю. Пусть такова последовательность $\{a_n\}$. Тогда из предложения 6.7 вытекает, что существует такое $c > 0$, что $|a_n| > c$ при всех $n \geqslant N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Положим $b_n = 1/a_n$ при $n \geqslant N$ и $b_n = 0$ при $n < N$. Из неравенства $|b_m - b_n| = \frac{|a_m - a_n|}{a_m a_n} \leqslant \frac{|a_m - a_n|}{c^2}$, выполненного при всех $m, n \geqslant N$, следует, что последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна. В самом деле, зададимся положительным рациональным числом $\varepsilon$. Ввиду фундаментальности последовательности $\{a_n\}$ существует такое $N_1$, что $|a_m - a_n| < c^2\varepsilon$ при $m, n > N_1$. Положим теперь $N_2 = \max(N, N_1)$; если $m, n > N_2$, то

$$|b_m - b_n| \leqslant \frac{|a_m - a_n|}{c^2} < \frac{c^2\varepsilon}{c^2} = \varepsilon,$$

что и утверждалось. Так как $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ (при $n > N$ все члены этой последовательности равны единице), число, представляемое последовательностью $\{b_n\}$, обратно к числу, представляемому фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Этим доказана возможность деления на ненулевые числа. По-ученому говоря, мы установили, что действительные числа образуют *поле*.

Чтобы определить неравенства, достаточно определить, что такое положительное число. Заметим, что если $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, не стремящаяся к нулю, то ввиду предложения 6.7 либо существует такое $c > 0$, что $a_n \geqslant c$ для всех $n$, кроме конечного числа, либо существует такое $c < 0$, что $a_n \leqslant c$ для всех $n$, кроме конечного числа. В первом случае будем говорить, что число, соответствующее последовательности $\{a_n\}$, *положительно*, а во втором — что оно *отрицательно*. Впрочем, надо еще проверить, что положительность и отрицательность не зависит от выбора фундаментальной последовательности, представляющей данное число. Это делается следующим образом. Пусть, например для фундаментальной последовательности $\{a_n\}$ существуют такие $c > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что $a_n \geqslant c$ при всех $n > N$ — это и означает, по нашему определению, что она представляет положительное число. Если последовательность $\{b_n\}$ эквивалентна последовательности $\{a_n\}$, то это по определению значит, что $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Значит, существует такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что $|a_n - b_n| < c/2$ при всех $n > N_1$. Если теперь $n > \max(N, N_1)$, то из неравенств $a_n \geqslant c$ и $|b_n - a_n| < c/2$ вытекает, что $b_n \geqslant c/2$. Значит, $b_n \geqslant c/2 > 0$ для всех $n$, кроме конечного числа, так что последовательность $\{b_n\}$ также представляет положительное число. Итак, положительность и отрицательность определены корректно.

Из нашего определения положительных и отрицательных чисел легко видеть, что верны следующие утверждения:

- всякое $\alpha \in \mathbb{R}$ либо положительно, либо равно нулю, либо отрицательно, причем эти три возможности попарно несовместимы.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ положительно тогда и только тогда, когда $-\alpha$ отрицательно;
- сумма и произведение положительных чисел положительны.

Если теперь положить по определению, что $\alpha > \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta$ положительно, то окажется, что для действительных чисел выполнены все обычные свойства неравенств (поскольку они формально выводятся из перечисленных выше свойств множества положительных чисел). По-ученому говоря, мы ввели на $\mathbb{R}$ структуру *упорядоченного поля.*

Далее, можно определить абсолютную величину действительного числа (по формуле $|a| = \max(a, -a)$ ) и проверить все обычные неравенства с модулями. Эта чисто формальная деятельность предоставляется читателю.

Коль скоро определены неравенства, обретают смысл определенное в первой лекции понятие предела последовательности действительных чисел; при этом доказательства всех утверждений из лекции 1, кроме «доказательства» теоремы о монотонной ограниченной последовательности, становятся полностью строгими, благо в их доказательстве ничего, кроме свойств неравенств, не используется.

Докажем теперь серию результатов, называемых теоремами о полноте действительных чисел (в их число входит и теорема о монотонной ограниченной последовательности).

Покажем сначала, что всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.

**Предложение 7.1.** *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ рациональных чисел, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.*

*Доказательство.* Пусть действительное число $\alpha$ представляется фундаментальной последовательностью $\{a_n\}$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (предел берется в $\mathbb{R}$!).

**Лемма 7.2** («аксиома Архимеда»). *Для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > \alpha$; для всякого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется такое $r \in \mathbb{Q}$, что $0 < r < \varepsilon$.*

*Доказательство леммы.* Второе утверждение леммы немедленно следует из первого, если положить $\alpha = 1/\varepsilon$ и $r = 1/n$. Для доказательства первого утверждения заметим, что фундаментальная последовательность $\{a_m\}$, представляющая число $\alpha$, ограничена ввиду предложения 6.6; в частности, $a_m < M$ для некоторого $M \in \mathbb{Q}$ и всех $m$. Пусть $n$ — такое натуральное число, что $n > M + 1$. Тогда $n - a_m > 1$ для всех $m$, так что число $n - \alpha$, представляемое фундаментальной последовательностью $\{n - a_m\}$, положительно. □

Возвращаясь к доказательству предложения, заметим, что ввиду второй части леммы достаточно убедиться, что для всякого *рационального* $r > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - \alpha| \leqslant r$ при всех $n \geqslant N$. Поскольку, однако, последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям определения 6.2, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_m - a_n| \leqslant r$ при $m, n \geqslant N$. В частности, при всех $m, n \geqslant N$ имеем $|a_m - a_N| \leqslant r$, или, что равносильно, $a_n - r \leqslant a_m \leqslant a_n + r$. Ввиду нашего определения неравенств отсюда вытекает, что $a_n - r \leqslant \alpha \leqslant a_n + r$, т. е. $|a_n - \alpha| \leqslant r$. Так как это верно при всех $n \geqslant N$, предложение доказано. □

Будем называть последовательность действительных чисел *фундаментальной*, если она удовлетворяет условиям определения 6.2 (при этом под $\varepsilon$ понимается произвольное действительное число).

**Теорема 7.3** (критерий Коши). *Последовательность действительных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

*Доказательство.* Часть «только тогда» доказывается дословно так же, как предложение 6.5. Докажем часть «тогда».

Пусть $\{\alpha_n\}$ — фундаментальная последовательность действительных чисел. Ввиду предложения 7.1, для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $r_n \in \mathbb{Q}$, что $|\alpha_n - r_n| < 1/n$. Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ фундаментальна: имеем

$$|r_m - r_n| \leqslant |\alpha_m - \alpha_n| + \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

и ясно, что если при $m, n \geqslant N$ имеем $|\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon/3$, а также $1/m < \varepsilon/3$ и $1/n < \varepsilon/3$, то для таких $m$ и $n$ будет выполнено неравенство $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Пусть $\alpha$ — действительное число, соответствующее фундаментальной последовательности рациональных чисел $\{r_n\}$; из предложения 7.1 (точнее говоря, из его доказательства) явствует, что $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Поскольку последовательность $\{r_n\}$ и $\{\alpha_n - r_n\}$ обе имеют предел (вторая из них стремится к нулю, поскольку ее $n$-й член по модулю меньше, чем $1/n$), из теоремы о пределе суммы вытекает, что предел есть и у последовательности $\{\alpha_n\}$. $\square$

Доказательство критерия Коши — последнее место в нашем курсе, где мы напрямую использовали определение действительных чисел как классов фундаментальных последовательностей. Далее мы будем пользоваться более удобными средствами.

**Определение 7.4.** *Точной верхней гранью* подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наименьшее из чисел $c \in \mathbb{R}$, обладающих следующим свойством: $x \leqslant c$ при всех $x \in X$ (такие числа мы будем называть «верхними границами» множества $X$). Точная верхняя грань множества $X$ обозначается $\sup X$.

Очевидно, что точная верхняя грань (иногда мы будем для краткости говорить просто «верхняя грань») единственна, если она существует. Ясно, что она не существует, если множество $M$ не является «ограниченным сверху» (то есть содержит сколь угодно большие числа). Во всех остальных случаях, однако, точная верхняя грань имеется:

**Теорема 7.5** (о верхней грани)**.** *Всякое ограниченное сверху непустое подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет верхнюю грань.*

*Доказательство.* Обозначим через $x_1$ наибольшее целое число, не являющееся верхней границей множества $X$ (такое существует ввиду «аксиомы Архимеда» 7.2). Построим теперь по индукции последовательность чисел $\{x_n\}$, ни одно из которых не является верхней границей множества $X$, следующим образом. В качестве $x_1$ берем число, построенное выше, а $x_{n+1}$ строим по $x_n$ так: если $x_n + 1/2^n$ также не является верхней границей множества $X$, то полагаем $x_{n+1} = x_n + 1/2^n$, в противном же случае полагаем $x_{n+1} = x_n$. Из нашего построения следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ число $x_n + 1/2^{n-1}$ является верхней границей для $X$.

Заметим, что $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant 1/2^n$, так что при $m > n$ имеем

$$0 \leqslant x_m - x_n \leqslant \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{m-2}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}};$$

стало быть, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и тем самым по критерию Коши имеет предел (обозначим его $x$). Покажем, что $x$ — верхняя грань множества $X$.

*1) $x$ является верхней границей для $X$.* Пусть, напротив, $y \in X$ и $y > x$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x + 1/2^{n-1} < y$; имеем $x_n + 1/2^{n-1} \leqslant x + 1/2^{n-1} < y$, в противоречие с тем, что $x_n + 1/2^{n-1}$ — верхняя граница для $X$.

*2) $x$ является наименьшей верхней границей для $X$.* Пусть, напротив, $y < x$ и $y$ является верхней границей для $x$. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \geqslant y$; поскольку $y$ является верхней границей для $X$, а $x_n$ — нет, получаем противоречие. □

У множества $X$, не являющегося ограниченным сверху, точной верхней грани в смысле определения 7.4 по понятным причинам не существует; тем не менее иногда в этом случае пишут $\sup X = +\infty$.

*Точной нижней гранью*, или просто нижней гранью подмножества $X \subset \mathbb{R}$ называется наибольшее из таких чисел $c$, что $c \leqslant x$ при всех $x \in X$. Из теоремы 7.5 ясно, что всякое ограниченное снизу множество имеет (единственную) точную нижнюю грань. Точная нижняя грань множества $X$ обозначается $\inf X$. Иногда полагают, что точная нижняя грань множества, не ограниченного снизу, равна $-\infty$.

Вот теперь мы в состоянии строго доказать и теорему о монотонной ограниченной последовательности.

**Предложение 7.6.** *Всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, для которой

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots;$$

обозначим через $X \subset \mathbb{R}$ подмножество, состоящее из чисел $x_n$ для всевозможных натуральных $n$. Так как по условию существует такое $C$, что $x_n \leqslant C$ для всех $n$, множество $X$ ограничено сверху; стало быть, ввиду теоремы 7.5 у него есть верхняя грань $\xi$.

Покажем, что $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\xi - \varepsilon$ не является верхней границей для множества $X$; значит, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_N > \xi - \varepsilon$. Если $n > N$, и подавно $x_n \geqslant x_N > \xi - \varepsilon$. С другой стороны, так как $\xi$ — верхняя граница для $X$, имеем $x_n \leqslant \xi$ для вообще всех $n$. В итоге получаем, что если $n > N$, то $\xi - \varepsilon < x_n \leqslant \xi$, откуда $|x_n - \xi| < \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon$ это означает, что $\xi$ является пределом последовательности $\{x_n\}$. □